

# ウェーブレット変換と逆問題的手法による画像合成について

関島 大志郎 , 早野 誠治 , 斎藤 兆古 (法政大学工学部)  
国井 利泰 (法政大学計算科学研究センター)

## Image Synthesis by combining the Wavelets and Inverse Approaches

D.SEKIJIMA ,S.HAYANO,Y.SAITO,and T.L.KUNII(Hosei Univ.)

### ABSTRACT

This paper tries to recover a color graphics image having original resolution from a low-resolution image by means of an inverse approach. A discrete wavelet transform makes it possible to concentrate an entire image information onto the vicinities of a mother wavelet spectrum region so that it is possible to obtain a rich information compressed image. Our problem is how to recover an image having original resolution from the rich information compressed image. One is a wavelets transform method, and the other is an inverse approach. The former recovers an image with finite accuracy, but the latter is capable of recovering an image with higher accuracy.

In this paper, we describe a way of constructing a rich information compressed image having low resolution, and that an inverse approach is able to recover a better image than those of the conventional wavelets transform method.

**Keywords:** Wavelets transform, Image synthesis, Inverse problem

### 1. まえがき

近年のデジタルコンピュータは工学や科学の方法論に多大な影響を与え、離散値系手法を広範に発達させた。例えば、多くの制御、測定システムはコンピュータの機能により自動化され、さらに技術者の設計や科学研究で遭遇する多くの解析的問題の大部分が数値的であるが解かれている。残っている解析的問題としては逆問題の解析のみであり、逆問題は新しい方法論を与えることができる反面、従来の解析的方法では解を与えることが不可能に近い。逆問題の例として、電気・電子機器からの漏洩電磁界源探査、原子力施設の放射線源探査などがある。逆問題解析が困難である理由は、多くの逆問題が不適切な方程式を解くことに帰するためである[1,2]。換言すると、逆問題は局所的情報から情報源を探索する問題であり、局所的情報から一意的に情報源を求めることが困難であることを意味する。

本論文では、逆問題で遭遇する不適切な線形システム方程式を解く新しい方法を提案する。この方法は与えられたベクトルが必ず、システム行列を構成している重みつき列ベクトルの線形結合で与えられるという事実に基づいている。重み係数が構成する列ベクトルは解ベクトルの要素である。多くの逆問題は未知数、すなわち重み係数が構成する列ベクトル(解ベクトル)の要素数が、与えられた情報、すなわち既知ベクトルの要素数よりも多い。このため、従来の線形システム理論では解ベクトルの個数が無数になり一意的な解を得ることが難しい。この問題を解決するため、無数の解ベクトルから正しい解ベクトルを導く拘束条件を与えることは極めて重要である。我々の方法は与えられた情報(入力ベクトル)と解ベクトルをシステム方程式へ代入して得られる近似入力ベクトル、それぞれのベクトルが持つ方向の一致性に

基づく極めて一般的な拘束条件を適用する。実際の計算では、それらの内積の反復計算で行われる。

本論文では、我々の逆問題解析法の理論的背景を述べ、応用例として、情報リッチな低解像度画像から高解像度の画像を再現する画像の逆問題解析について報告する。

### 2. 逆問題解析法

#### 2.1. 不適切な線形システム方程式

(1) 式で与えられる一般的な線形システム方程式を考える。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{Y}$  は  $n$  次の入力ベクトル、 $\mathbf{X}$  は  $m$  次の解ベクトル、そして  $\mathbf{C}$  は  $n$  行  $m$  列のシステム行列であり、多くの場合  $m > n$  である。(1) 式は (2) 式のように書き直すことも可能である。

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{C}_i, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \dots \quad \mathbf{C}_m] \quad (2)$$

さらに (2) 式の両辺を入力ベクトルと列ベクトル、それぞれのノルムで正規化して (3) 式を得る。

$$\frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} = \sum_{i=1}^m x_i \frac{|\mathbf{C}_i|}{|\mathbf{Y}|} \frac{\mathbf{C}_i}{|\mathbf{C}_i|},$$

or

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{C}' \mathbf{X}'.$$

## 2.2. 評価関数

(2)式は入力ベクトル  $\mathbf{Y}$  が必ずシステム行列の列ベクトル  $\mathbf{C}_i$  の線形結合で与えられることを意味する。したがって、 $k$  回目の反復解  $\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}$  と入力ベクトル  $\mathbf{Y}$  間の角度

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}^{(k)}) &= \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \cdot \frac{\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}}{|\mathbf{C}\mathbf{X}^{(k)}|} \\ &= \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \cdot \frac{|\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}|} \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}|} \\ &= \mathbf{Y}' \cdot \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}|}. \end{aligned} \quad (4)$$

を解の評価関数とし、

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) \rightarrow 1, \quad (5)$$

となる解ベクトル  $\mathbf{X}^{(k)}$  を得る。このとき、入力ベクトル  $\mathbf{Y}'$  と解ベクトル  $\mathbf{X}^{(k)}$  を(6)式

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k)}. \quad (6)$$

へ代入して構成されるベクトルの方向は一致する。反復計算の初期値を  $\mathbf{X}^{(0)}$  とすると (7) 式を得る。

$$\Delta\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}' - \mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}. \quad (7)$$

$I_m$  を  $m$  次の単位正方行列、 $\Delta\mathbf{X}^{(1)}$  を解の誤差ベクトルとすると、第一次近似解ベクトルは (8) 式の形で書ける。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \mathbf{X}^{(0)} + \Delta\mathbf{X}^{(1)} \\ &= \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}^{iT} \Delta\mathbf{Y}^{(1)} \\ &= \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}^{iT} \left( \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}|} \right) \\ &= \mathbf{C}^{iT} \mathbf{Y}' + \left( I_m - \frac{\mathbf{C}^{iT} \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(0)}|} \right) \mathbf{X}^{(0)}. \end{aligned} \quad (8)$$

したがって、 $k$  回目の解ベクトル  $\mathbf{X}^{(k)}$  は (9) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k)} &= \mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{C}^{iT} \Delta\mathbf{Y}^{(k-1)} \\ &= \mathbf{C}^{iT} \mathbf{Y}' + \left( I_m - \frac{\mathbf{C}^{iT} \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}|} \right) \mathbf{X}^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

## 2.3. 収束条件

(9) 式で解が収束する条件は状態遷移行列  $S$

$$\begin{aligned} S &= I_m - \frac{\mathbf{C}^{iT} \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}|} \\ &= I_m - \frac{\mathbf{C}^{iT} \mathbf{C}'}{|\mathbf{Y}'^{(k-1)}|} \end{aligned} \quad (10)$$

の最大固有値が 1 より小さければ、解は必ず収束する。しかしながら、(10) 式において状態遷移行列  $S$  は定数値からなる行列ではなく、解ベクトル  $\mathbf{X}^{(k-1)}$  の関数である。このため、解の収束条件は解ベクトル  $\mathbf{X}^{(k-1)}$  そのものに依存する。しかし、単位正方行列の固有値は 1 の重根であるから、収束条件は

$$\begin{aligned} |I_m| &\geq |S|, \\ |I_m| &\geq \left| I_m - \frac{\mathbf{C}^{iT} \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}'\mathbf{X}'^{(k-1)}|} \right| \end{aligned} \quad (11)$$

or

$$\|\mathbf{C}^{iT} \mathbf{X}'^{(k-1)}\| |I_m| \geq \|\mathbf{C}^{iT} \mathbf{X}'^{(k-1)}\| |I_m - \mathbf{C}^{iT} \mathbf{C}'|.$$

とも書ける。(11) 式において、行列  $\mathbf{C}^{iT} \mathbf{C}'$  の対角要素は全て 1 であり、対角線要素以外の要素の絶対値は全て 1 以下である。このため、(11) 式の条件は常に成り立ち (9) 式は絶対に安定な反復解を与える。これは、状態遷移行列  $S$  の最大絶対値を持つ対角要素が近似的に最大固有値に等しいためである。

## 3. コンピュータグラフィックスにおける逆問題

### 3.1. 情報量が多い画像の圧縮

コンピュータグラフィックスにおけるすべての画像は画素の集まりであり、個々の画素は赤、緑そして青の成分の集合である。すなわち、

$$\begin{aligned} image &\in pixel, \\ pixel &\in Red, Green, Blue. \end{aligned} \quad (12)$$

である。これは、画像は赤、緑そして青の成分で表現されることを意味する。

よって、

$$image \in I_R, I_G, I_B, \quad (13)$$

の関係が成り立つ。(13)式で、 $I_R, I_G, I_B$  はそれぞれ赤、緑、青の成分である。 $I_R, I_G, I_B$  をそれぞれ、 $m \times m$  次正方行列とすると、それらのウェーブレットスペクトラムは (14) 式によって与えられる。

$$\begin{aligned}
S_R &= W_m \cdot I_R \cdot W_m^T, \\
S_G &= W_m \cdot I_G \cdot W_m^T, \\
S_B &= W_m \cdot I_B \cdot W_m^T,
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで  $W_m$  は  $m$  行  $m$  列のウェーブレット変換行列である。

情報量リッチな赤、緑そして青成分の低解像度画像は (15) 式によって得られる。

$$\begin{aligned}
I_R' &= W_n^T \cdot D_{n,m} \cdot S_R \cdot D_{n,m}^T \cdot W_n, \\
I_G' &= W_n^T \cdot D_{n,m} \cdot S_G \cdot D_{n,m}^T \cdot W_n, \\
I_B' &= W_n^T \cdot D_{n,m} \cdot S_B \cdot D_{n,m}^T \cdot W_n,
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで、

$$D_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

である。(15) 式で、 $n$  行  $m$  列の結合行列  $D_{n,m}$  は (14) 式でのウェーブレットスペクトラム行列  $S_R, S_G, S_B$  から  $n$  行  $n$  列の正方行列を取り出す。このようにして、低解像度でありながらリッチな情報を有する画像  $image'$  は (17) 式によって得られる。

$$\begin{aligned}
image' &\in I_R', I_G', I_B', \\
I_R' &= R \cdot I_R \cdot R^T, \\
I_G' &= R \cdot I_G \cdot R^T, \\
I_B' &= R \cdot I_B \cdot R^T, \\
R &= W_n^T \cdot D_{n,m} \cdot W_m.
\end{aligned} \tag{17}$$

### 3.2. ウェーブレット変換による画像再現

オリジナルの解像度を持つ  $image''$  は、(18) 式のウェーブレット変換によって得られる。

$$\begin{aligned}
image'' &\in I_R'', I_G'', I_B'', \\
I_R'' &= R^T \cdot I_R' \cdot R, \\
I_G'' &= R^T \cdot I_G' \cdot R, \\
I_B'' &= R^T \cdot I_B' \cdot R.
\end{aligned} \tag{18}$$

### 3.3. 逆問題的手法による画像再現

(18) 式は  $n$  のみならずウェーブレット変換の基底関数選択によって変わり、有限な再現性を持つ  $image''$  を与える[3]。ここでは逆問題手法に基づく新しい再現方法について述べる。

まず最初に、(15) 式におけるウェーブレットスペクトラム  $S_R, S_G, S_B$  から、2次元配列の要素を1次元配列に変換する  $flatten$  演算子によって既知ベクトルである  $Y_R, Y_G, Y_B$  を得る。 $flatten$  演算の具体例を (19) 式に与える。

$$flatten \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}. \tag{19}$$

(19) 式を用いて (20) 式を得る。

$$\begin{aligned}
Y_R &= flatten(D_{n,m} S_R D_{n,m}^T), \\
Y_G &= flatten(D_{n,m} S_G D_{n,m}^T), \\
Y_B &= flatten(D_{n,m} S_B D_{n,m}^T)
\end{aligned} \tag{20}$$

次に、システム行列  $C$  を生成しなければならない。あらゆる画像要素  $I_R, I_G, I_B$  は、(21) 式に示す行列の重みつき線形結合で表される。

$$\begin{aligned}
I_R, I_G, I_B &\in C_{1,1}, C_{1,2}, \dots, C_{m,m}, \\
C_{1,1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, C_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{21}$$

$$C_{1,m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, C_{m,m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) 式における列ベクトル  $C_1, C_2, \dots, C_m$  は (22) 式によって構成される。

$$\begin{aligned}
C_1 &= flatten(D_{n,m} \cdot W_m \cdot C_{1,1} W_m^T \cdot D_{n,m}^T), \\
C_2 &= flatten(D_{n,m} \cdot W_m \cdot C_{1,2} W_m^T \cdot D_{n,m}^T), \\
&\dots \\
C_m &= flatten(D_{n,m} \cdot W_m \cdot C_{m,m} W_m^T \cdot D_{n,m}^T)
\end{aligned} \tag{22}$$

したがって、カラー画像の赤、緑、青成分、それぞれに対するシステム方程式は

$$Y_R = C X_R, Y_G = C X_G, Y_B = C X_B. \tag{23}$$

となる。

## 4. 例題

Fig.1 の左に  $64 \times 64$  画素から成るオリジナルデータを示し、右側にドビッシーの 16 次基底関数を用いて、(17) 式により縮小された  $32 \times 32$  画素の画像を示す。Fig.2 に (18) 式のウェーブレット変換によって再現された画像を示す。ドビッシーの 8 次と 16 次の基底関数を用いて再現された画像をそれぞれ、左と右に示した。この 2 枚の画像は殆ど同一な再現性を持つことがわかる。Fig.3 に (23) 式の逆問題的手法による再現画像を示す。システム構成にドビッシーの 8 次と 16 次の基底関数を

用いた場合の再現画像を Fig.3 の左と右にそれぞれ示す。再現された画像を相関係数で評価すると4個の再現画像、どれも0.92以上の再現性を有する。しかし、格子状のノイズを含有するにも拘らず、明らかに Fig.3 の右の再現画像が最も良い再現性を示している。

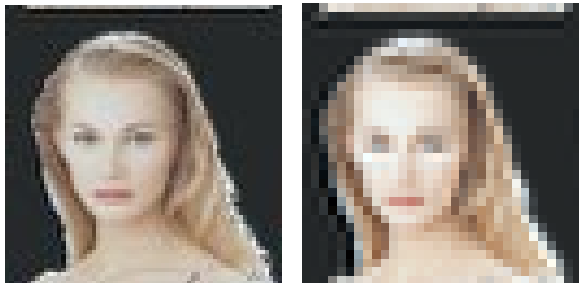


Fig.1. The original (left) and compressed (right) images



Fig.2. The recovered images by Eq.(18).  
Left:Daubechies 8-th,Right:Daubechies 16-th

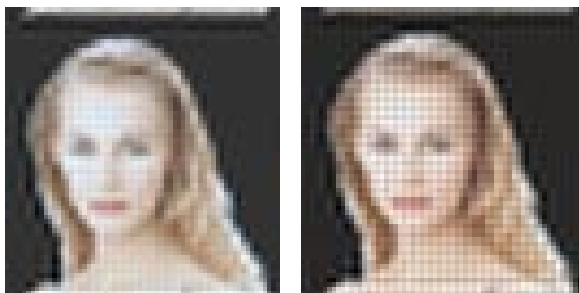


Fig.3. The recovered images by Eq.(23).  
Left:Daubechies 8-th,Right:Daubechies 16-th

## 5. 結論

本論文では、情報リッチな低解像度画像からオリジナルの解像度を持つ画像を再現するために逆問題的手法を提案した。その結果、逆問題的手法は、通常のウェーブレット変換による方法よりも高い再現性を有する再現画像を与える可能性を示唆した。

## 参考文献

- [1] T.Do, S.Hayano, I.Marinova, N.Ishida and Y.Saito," Defect recognition in conductive materials by local magnetic field measurement," Journal of Applied Physics,Vol.75, No.10, May, (1994) pp.5907-5909.
- [2] T.Do, S.Hayano and Y.Saito " Wavelet solution of the inverse source problems ", IEEE Transaction on Magnetics, Vol.MAG-33, No.2, March,(1997),pp.1935-1938.
- [3]石田則道、他、ウェーブレット変換を用いたカラー画像の縮小・拡大について、(第27回可視化情報シンポジウム講演論文集1999年7月)