

Sampled Pattern Matching法を用いた 電気ポテンシャル法による欠損推定

Defect Estimation by combining
the Electric Potential with SPM Methods

土井達也 早野誠治 斎藤兆古
T. Doi, S. Hayano and Y. Saito

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

主として鉄などの導電性金属によって構成される鉄橋・航空機などで金属疲労に起因して生ずる亀裂または欠損は、大事故を引き起こす可能性がある。そのため、外部から亀裂または欠損の推定を行う非破壊検査技術は、これらの安全対策上、非常に重要な技術であり、渦電流探傷法・X線CT・超音波探傷法・電気ポテンシャル法のような多くの非破壊検査法が、提案され、利用されてきた。しかし、測定に複雑な装置を必要としたり、また、非破壊検査は本質的に逆問題を解くことに帰し、この逆問題を解く決定的な逆問題解析技術が開発されていない等の理由により、正確な欠損推定を行うためには何らかの経験的な技術を要するのが現状である。

これらの非破壊検査技術の中で、外部から電流を通電し、欠損によって被検査物体の表面に生じる電気ポテンシャルの変化を用いて欠損推定を行う電気ポテンシャル法は、比較的簡単な装置で測定を行うことができる利点がある。このため、この電気ポテンシャル法を用いて物体内部の欠損の位置・形状・大きさまで推定する方法が提唱されている [1, 2]。

電気ポテンシャル法による正確な欠損推定を実行するために、本稿では、この問題に対して全く新しい方法を提案する。この方法の骨子は、(1)欠損を等価電圧源に置き換え、(2)等価電圧源の大きさを単位電圧源の空間的集中度で表し、(3)外部から通電する方向を変化させ、各通電方向に対して共通となる等価電圧源を求め、という点にある。また、等価電圧源の位置推定を実行する方法として、以前から著者等が提唱している一般化された因子分析法の1つである Sampled Pattern Matching (SPM) 法を採用する [3, 4]。その結果、複数個の欠損がある問題でも比較的良好な結果が得られたので報告する。

2. 逆問題の定式化

2.1. 静電流場

無限に広い静電流場では、電気ポテンシャル ϕ は、導電率 κ と電流密度 J を用いて、以下の関係式で表される。

$$-\kappa \nabla \phi = J. \quad (1)$$

もし、導電率 κ の導体に欠損があるとすると、(1)式は、

$$-\kappa \nabla \phi_d = J + J_s. \quad (2)$$

のように表される。ここで、 ϕ_d は、欠損があるときの材料中の電気ポテンシャルであり、 J_s は、欠損部の導電率を κ としたときの等価電流密度である。

(2)式から(1)式を引くと、

$$-\kappa \nabla (\phi_d - \phi) = J_s. \quad (3a)$$

または、

$$-\kappa \nabla \phi_s = J_s. \quad (3b)$$

である。ここで、

$$\phi_s = \phi_d - \phi. \quad (3c)$$

である。

(3b)式の発散をとると、

$$\nabla^2 \phi_s = -\nabla \cdot J_s / \kappa. \quad (4)$$

となる。

(4)式は、欠損によって生じる電気ポテンシャルの差 ϕ_s が、欠損の表面から湧き出る等価電流密度 J_s の発散として表すことができることを示している。従って、欠損推定問題は、(3c)式の測定値である電気ポテンシャルの差 ϕ_s を用いて、等価電流密度源 J_s の位置を探す問題に置き換えることができる。空間全体の電気ポテンシャルの差 ϕ_s が測定可能であれば電流密度 J_s は、(4)式に ϕ_s を代入することによって簡単に求めることができる。この問題は、直接問題と呼ばれている。しかし、多くの場合、局所的な電気ポテンシャル（例えば、材料の輪郭に沿った電気ポテンシャル）しか測定することができない。このような場合、 J_s の解を一意的に決定することは難しい。

2.2. 逆問題のシステム方程式

(4)式において左辺は、媒質のパラメータ κ を含まないので、電気ポテンシャル ϕ_s は、積分形を用いて以下のように書かれる。

$$\phi_s = \int_V G (\nabla \cdot J_s / \kappa) dV \quad (5)$$

ここで、 G はグリーン関数であり、ポテンシャル ϕ_s の位置とその発生源である $\nabla \cdot \mathbf{J}_s$ との幾何学的な関係で決定される。(5)式は、この問題の支配方程式である。

(5)式における電気ポテンシャル源を含む領域 V が、 m 個の微小領域 ΔV_i に分割され、また、個々の領域 ΔV_i にGaussの定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V_i} G (\nabla \cdot \mathbf{J}_{si} / \kappa) dV &= \int_{\Delta S_i} G (\mathbf{J}_{si} / \kappa) dS, \\ &= (G_{i^+} - G_{i^-}) | \mathbf{J}_{si} / \kappa |, \\ &= (G_{i^+} - G_{i^-}) | P_i |, \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、 ΔS_i , \mathbf{J}_{si} , P_i は、それぞれ、 ΔV_i の表面積、電流密度 \mathbf{J}_{si} によって決定される電流、及び、電圧双極子 $(\mathbf{J}_{si} / \kappa)$ [Vm]である。(6)式で、電流密度 \mathbf{J}_{si} と導電率 κ は、 ΔV_i 内で一定の値をとると仮定した。また、 G^+ と G^- は、それぞれ、電気ポテンシャルの測定点と電圧双極子の出発点および終点との幾何学的な関係より決まるグリーン関数を表している。

電気ポテンシャルの差 ϕ_s の測定点の個数を n とすると、(5)式は、次のように書き換えられる。

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{d}_i \quad (7a)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = [\phi_{s1}, \phi_{s2}, \dots, \phi_{sn}]^T, \quad (7b)$$

$$\mathbf{d}_i = [G_{i1^+} - G_{i1^-}, G_{i2^+} - G_{i2^-}, \dots, G_{in^+} - G_{in^-}]^T, \quad (7c)$$

であり、 a_i は、電圧双極子ベクトル P_i の大きさを表している。(7a)式を行列表示すると以下のようなになる。

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

(7b)式でベクトル \mathbf{U} の要素は、測定値である電気ポテンシャルである。(7c)式で下添字 $i1, i2, \dots, in$ は電気ポテンシャル源と測定点間の関係を示し、 $1, 2, \dots, n$ 点は測定ポテンシャル点にそれぞれ対応している。さらに、電気ポテンシャルは、ポテンシャル源を含む全領域で測定されるのではなく、限られた点でしか測定されないため、このような逆問題では次の条件、

$$n < m, \quad (9)$$

が成り立つ。

(8)式は、逆問題のシステム方程式であり、また、欠損推定問題は、(8)式の α_i ($i=1\sim m$) の位置を求めることに帰する。

2.3. Projective Sampled Pattern Matching (PSPM) 法

従来から筆者らが提唱している Sampled Pattern Matching (SPM) 法は、対象物体内部に電磁界源が存在する問題を前提としている。しかし、本稿で取り扱う問題は、内部に電磁界源を含まず、外部から通電することで生ずる等価電磁界源を推定することにある。従って、欠損部に起因する等価電磁界源は外部からの通電方向を変化させることでその方向も変化することから、従来の SPM 法に何らかの変形をする必要がある。本稿では、外部から通電する電流の方向に対して、欠損部に起因する電磁界源ベクトルの方向が逆方向であるため、SPM 法で仮定する対象領域内の等価電圧双極子の方向をすべて外部から通電する電流方向に投影 (Projection) して実行する。この方法を、Projective Sampled Pattern Matching (PSPM) 法と呼ぶ。換言すれば、PSPM 法は、外部電流と逆方向の電圧双極子のみについて SPM 法を実行する方法である。

さて、SPM 法は、Cauchy-Schwarz の関係式に基づいて入力源 (ポテンシャル源) の位置を探す方法である。すなわち、

$$\gamma_i = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{d}_i / (\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{d}_i\|), \quad i=1\sim m, \quad (10a)$$

によって評価する方法である。明らかに、(10a) 式は、測定値ベクトル \mathbf{U} と i 点における入力源に起因するポテンシャルパターンベクトル \mathbf{d}_i との角度、または、パターンの一致度合を与えるので、 γ_i の最大値を与える点は、最も影響を与える入力源の位置である。最初の入力源の位置 j (パイロットポイントと呼ばれ、(10a) 式で最大値 γ_j をとる点である。) を見つけた後、2 番目の点は、パターンベクトル \mathbf{d}_j を用いて、次式の γ_k が最大値を取る点とする。

$$\gamma_k = \mathbf{U}^T \cdot (\mathbf{d}_j + \mathbf{d}_k) / (\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{d}_j + \mathbf{d}_k\|), \quad k=1\sim m, k \neq j. \quad (10b)$$

(10a) 式から (10b) 式への過程と同様な過程を続けることによって、ポテンシャル入力源の分布パターンを得ることができる。

PSPM 法では、欠損推定問題を、(5) 式の等価電圧源を探すことに置き換える。そのため、(10a) 式と (10b) 式の各過程での SPM は、(5) 式での外部入力電流密度 \mathbf{J} の方向へポテンシャルパターンベクトル \mathbf{d}_i ($i=1\sim m$) を投影することによって行われる。この投影により、等価電圧双極子の代わりに欠損の位置を与える。この投影は、外部電流密度 \mathbf{J} に対して欠損に起因する等価電流密度 \mathbf{J}_s が逆方向に生ずるために行う一種のフィルタ演算とも考えられる。

3. 例題

3.1. 2次元の電流場問題の定式化

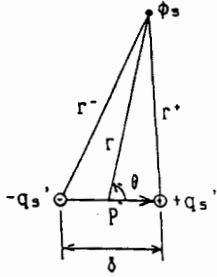


図1. 電圧双極子による2次元の電気ポテンシャル場

2次元の場に対するグリーン関数は、

$$G = \log_e r / (2\pi) \quad (11)$$

であり、ここで、 r は、ポテンシャル源と測定点との距離と定義する。

次に、図1に示すように、電圧双極子Pによって決まる電位 ϕ_s を考える。電荷の時間微分 $+q_s'$ と $-q_s'$ を考え、これらが距離 δ 離れた位置の電気ポテンシャル場にあるとすると、 q_s' は、次式のように表される。

$$q_s' = \int_{\Delta_s} \nabla \cdot \mathbf{J}_s dS = |\mathbf{I}_s| = \kappa |P| \quad (12)$$

ここで、 $'$ は、時間微分を表す。

(5)式および(6)式から、電位 ϕ_s は、

$$\phi_s = \{q_s' / (2\pi\kappa)\} (\log_e r^+ - \log_e r^-) \quad (13)$$

によって与えられる。ここで、距離 r^+ と r^- は、図1に示すとおりである。

図1において、電圧双極子の中心から ϕ_s の位置までの距離として r を定義し、また、 $\delta \ll r$ であるとすると、

$$r^+ \cong r \{1 - \delta \cos \theta / 2r\} \quad (14a)$$

$$r^- \cong r \{1 + \delta \cos \theta / 2r\} \quad (14b)$$

が成り立つ。ここで、 θ は、ベクトルPと r とのなす角である。(14a)式と(14b)式を(13)式に代入すると、 $\{\delta \cos \theta / (2r)\} < 1$ であるので、

$$\begin{aligned} \phi_s &= \{q_s' / (2\pi\kappa)\} \{(\delta/r) \cos \theta + (1/3) (\delta/r)^3 \cos^3 \theta + \dots\} \\ &\cong \{q_s' \delta / (2\pi\kappa)\} (1/r) \cos \theta \\ &= \{|P| \delta / (2\pi)\} (1/r) \cos \theta \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

(15)式は、電位 ϕ_s が距離 r と電圧双極子Pの角度 θ との関数であることを表している。それゆえ、欠損の位置を探すことは、SPM法を行うことにより、測定値である電気ポテンシャル ϕ_s を用いて、距離 r と角度 θ を得ることに帰する。

3.2. 2次元導体中の欠損推定

まず、内部に欠損がある導電率 κ の2次元の円形の導体を考え、この導体

に水平方向に平行に電流が流れており、さらに、この導体の全周辺の電気ポテンシャル ϕ_s が測定できる問題を設定して、計算機シミュレーションを行った。このような問題は、媒質のパラメータ、および、測定領域の全周辺の測定値が既知で、さらに、内部に電流源・電圧源を含まない問題である。

図2(a)-(c)には、左から右に電流を平行に流したときに円形の測定領域の輪郭に沿った欠損がある場合と無い場合の電気ポテンシャルの差 ϕ_s を示し、この電気ポテンシャル ϕ_s は、有限要素法によって求めた。電流密度 J は、欠損がないときには、測定材料中で水平方向に平行に流れる。図2に示すそれぞれの材料には、三角形メッシュで示された台形状の欠損があり、その欠損のために電気ポテンシャルの変化量 ϕ_s が引き起こされている。この電気ポテンシャルの差 ϕ_s を測定値として、PSPM法を適用する。以下、図3-5にPSPM法による結果を示す。

図3(a)-(c)は、それぞれ図2(a)-(c)に対応し、欠損が1、2および3箇所の場合に対するPSPM法による結果である。尚、これらの結果では、測定点数に等しい数まで求めたパイロットポイントで評価しており、従来のSPM法と異なりパターンマッチング指数 γ の加算平均値によるではない。また、外部からの通電方向は、一方向のみである。これに対し、図4(a)-(c)は、外部からの電流の通電方向を測定領域に対して 5° おきに 360° 回転させて、各角度ごとにPSPM法を適用し、測定点数に等しいパイロットポイント数を各通電方向で求め、全周の結果を加算平均したものである。図3と図4の比較から、PSPM法は外部からの通電方向を変化させることで、ほぼ正確に複数個の欠損箇所の位置だけでなく、大きさも推定できることがわかる。図5は、推定対象領域を図4に比較して細分化し、精度の向上を企った例である。明らかに、図5は図4に比較して高精度で推定されていることがわかる。

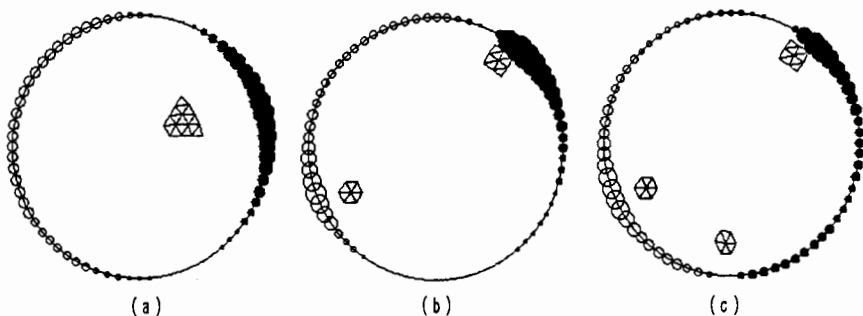


図2. 欠損に起因する測定点の電位分布 ϕ_s 。(a)欠損が1箇所の場合、(b)欠損が2箇所の場合、(c)欠損が3箇所の場合。

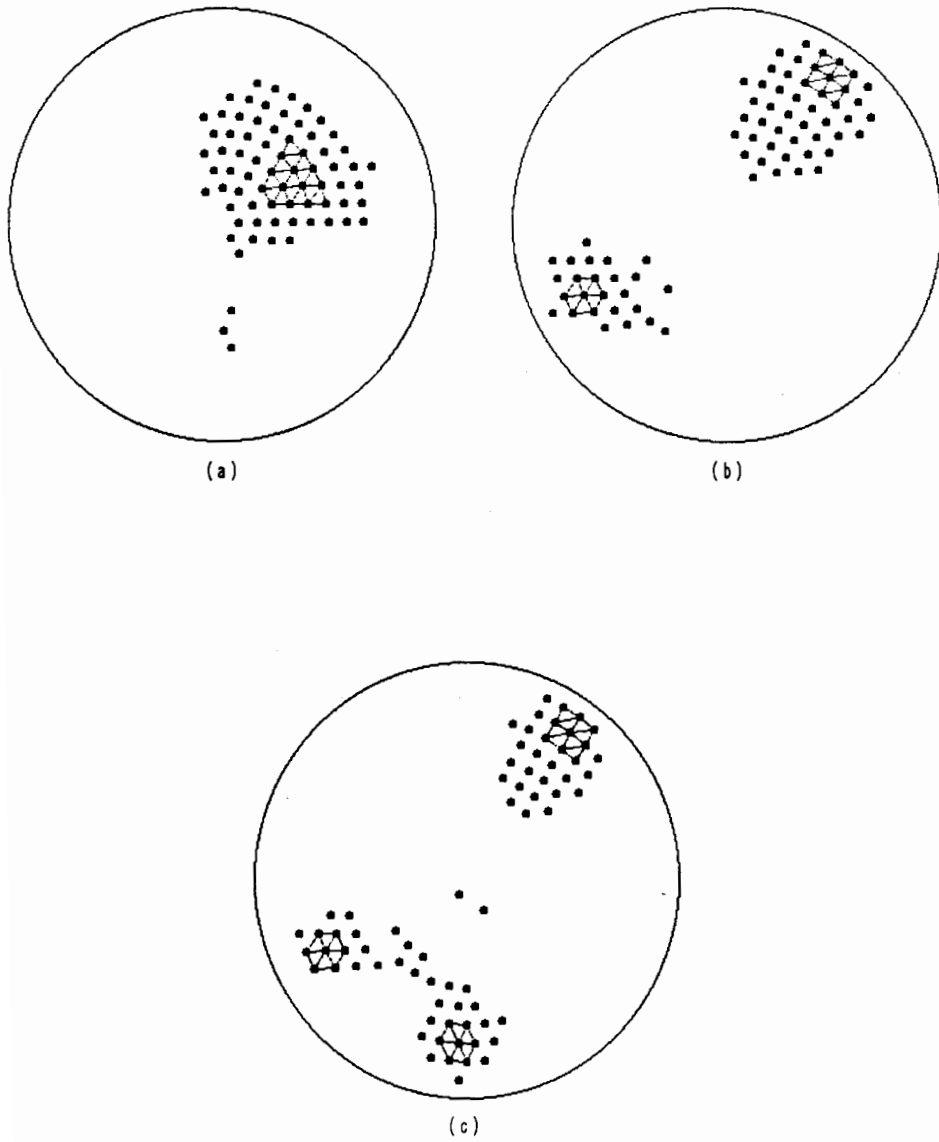
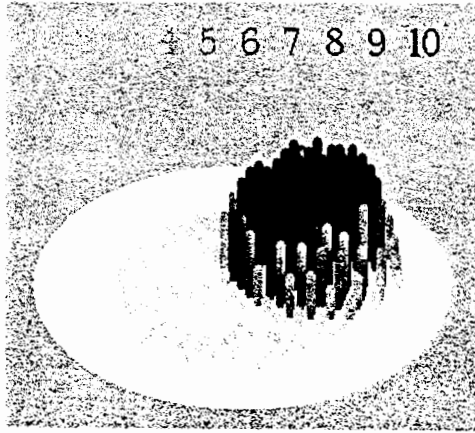
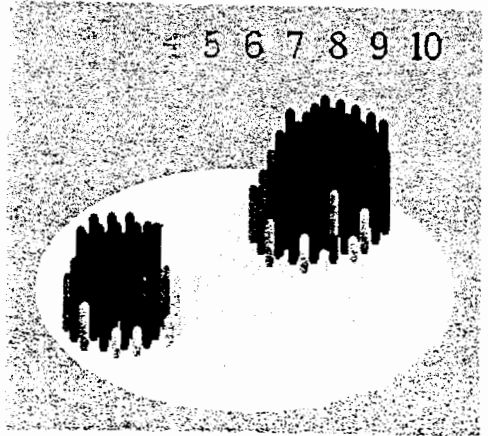


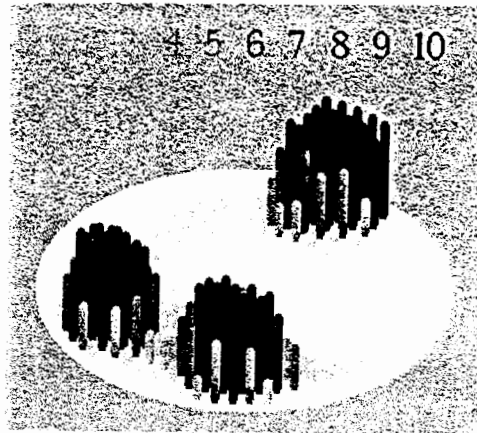
図3. 一方向から通電した場合のPSPM法による結果。(a)欠損1箇所、(b)欠損2箇所、(c)欠損3箇所(点の広がり、欠損の大きさに対応する。)。三角形メッシュ部は欠損部を示す。



(a)

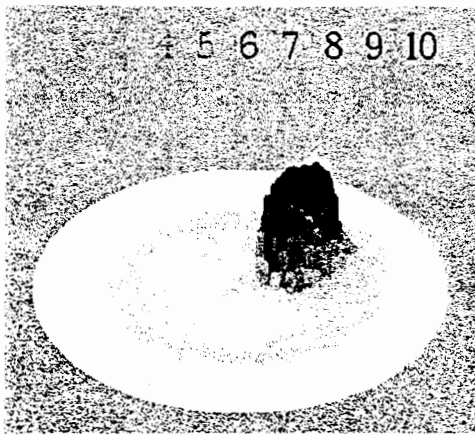


(b)

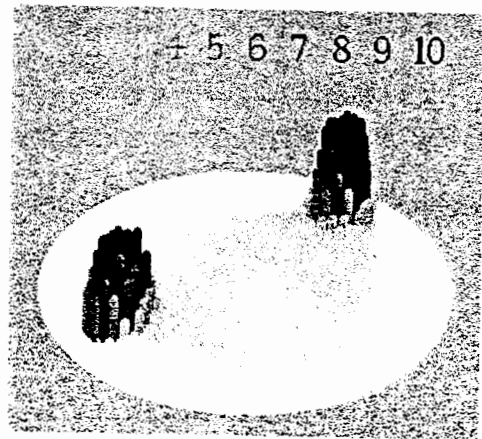


(c)

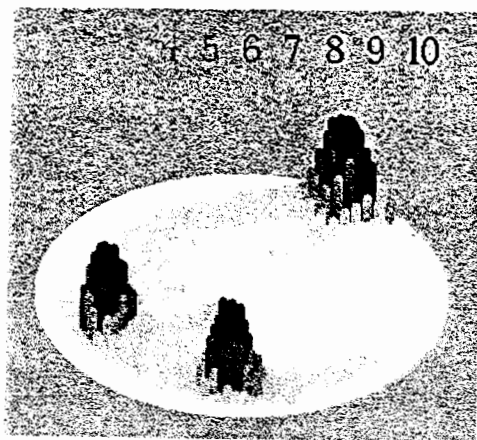
図4. 測定点に沿って通電方向を1周回転させた場合。(a)欠損1箇所、(b)欠損2箇所、(c)欠損3箇所(棒の広がり、欠損の大きさに対応する)。正解は図3の三角形メッシュ部である。



(a)



(b)



(c)

図5. 図4の精度向上を企った例。(a)欠損1箇所。(b)欠損2箇所。(c)欠損3箇所(棒の広がり、欠損の大きさに対応する。)。正解は図3の三角形メッシュ部である。

4. むすび

以上のように、本稿では、欠損推定問題を等価電圧源推定問題に置き換える新しい定式化を行い、さらに、PSPM法を提案し、この問題に適用した。その結果、この新しい方法は、材料中に欠損が複数個ある問題に対しても適用可能であり、欠損の位置と大きさを推定することにある程度成功した。さらに、外部電流の流す方向を変え、PSPM法を実行することによって、欠損の形状まで推定できることに成功した。

外部から入力を測定領域にあらゆる方向から与えて、測定領域表面上の物理的な変化から測定領域内部の形状や性質を推定する方法は、X線CT等に応用されており、本稿で提案したPSPM法による欠損推定法は、電気ポテンシャル法による一種のCTであるとも考えられる。

5. 参考文献

- [1] S. Kubo et al., "A Simple scheme for identification of a semielliptical surface crack from D.C. potential readings," *Int. J. Appl. Electromag. Mater.*, Vol. 2, No. 1, pp. 81-90, May 1991.
- [2] Y. Iwamura et al., "Numerical approach to inverse problem of crack shape recognition based on the electrical potential method," *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 26, No. 2, pp. 618-621, Mar. 1990.
- [3] Y. Saito et al., "A formulation of the inverse problems in magnetostatic fields and its application to a source position searching of the human eye fields," *J. Appl. Phys.*, Vol. 67, No. 9, pp. 5830-5832, May 1990.
- [4] 早乙女 他, 「生体磁界における逆問題」 *電気学会論文誌A*, 112巻4号, PP. 279-286, 平成4年4月.
- [5] P. P. Silvester et al., "Finite elements for electrical engineers," Cambridge Univ. Press, 1983.
- [6] 土井 他, 「電気ポテンシャル法による欠損探査」 第1回 MAGDA Conference, pp. 237-240, 1992年4月.

原稿受付日	平成4年7月23日
-------	-----------