

渦電流問題の非スプリアス有限要素解

Non-spurious Finite Element Solution of Eddy Current Problems

斎藤 兆古, 中沢 良浩, 早野 誠治

Y. Saito, Y. Nakazawa, and S. Hayano

法政大学 工学部

College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

1950年代に構造力学の分野で誕生した有限要素法は、デジタル計算機の発達、普及を背景に発展し、偏微分方程式の数値解析法の有力な手法として工学の多くの分野への応用が研究されてきた。これは、電気・電子工学においても例外でなく、有限要素法は高電圧機器の電界計算や回転機・静止器等の磁界計算、導波路等の電磁波・光波の問題、半導体デバイスシミュレーション等に広範に利用されている。

電気・電子工学における有限要素法は、大別して、半導体デバイスシミュレーションのようにスカラーポテンシャル問題を扱うスカラー有限要素法と、電界ベクトルや磁界ベクトル等を用いたベクトル有限要素法に分類できる。この中で、ベクトル有限要素法における固有値問題では、物理的に存在しないスプリアス解が発生することが知られている。この非物理的なスプリアス解を抑圧するために、ペナルティー法、電磁波の構成成分を用いる方法、あるいは新しい要素を用いる方法が提案されている[1-6]。

スプリアス解を抑圧する努力は大部分導波路の固有値問題に対して行われているのが現状である。ところが、導波路における固有値が系の自然振動数に対応するのに対し、渦電流問題における固有値が系の時定数に対応することから、固有値問題は渦電流問題に対しても重要なテーマである[7,8]。

本稿では、渦電流問題が固有値問題として解析されることを示し、渦電流問題にスプリアス解が存在することを示す。さらに、スプリアス解の発生しない一方法を提案する。

2. ベクトル有限要素法

2.1. 基礎方程式

渦電流を呈する系は以下の方程式によって表される。

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1c)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1d)$$

ここで、 \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J} , σ , μ はそれぞれ電界, 磁界, 磁束密度ベクトル, さらに導電率と

透磁率である。(1a) - (1d) 式を組み合わせると、次の支配方程式が得られる。

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times B + \sigma \frac{\partial B}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

(2) 式で外部電流密度源 J_s が系に結合しているとき、外部入力ベクトル f_s を

$$f_s = \nabla \times J_s, \quad (3)$$

とすれば、(2) 式は

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times B + \sigma \frac{\partial B}{\partial t} = f_s, \quad (4)$$

となり、非同次のベクトル拡散方程式を得る。(4) 式を次式で定義されるベクトルポテンシャル A を用いて表す。

$$\nabla \times A = B. \quad (5)$$

(5) 式を(4)式に代入し、積分して次の関係を得る。

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times A + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = J_s + \nabla \phi. \quad (6)$$

ここで、 ϕ は任意のスカラーポテンシャルであるから、

$$\frac{1}{\mu} \nabla \cdot A = \phi, \quad (7)$$

とすれば、(6) 式は、

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -J_s, \quad (8)$$

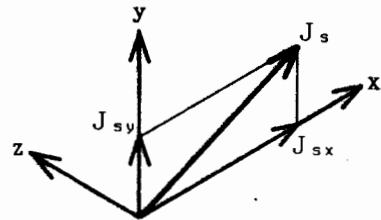
となる。(8) 式は、ベクトルポテンシャル A で表された支配方程式である。ベクトルポテンシャル A は、 B が $x-y$ 平面の二次元のとき、 z 方向成分のポテンシャル A_z となり、 B が $x-y-z$ 空間の三次元では、ベクトルポテンシャル A は x 成分 A_x と y 成分 A_y から成り、磁束密度 B の各成分は、

$$B_x = -\partial A_y / \partial z, \quad (9a)$$

$$B_y = \partial A_x / \partial z, \quad (9b)$$

$$B_z = \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y, \quad (9c)$$

と表される。さらに、 J_s は二次元では z 方向成分のみであり、三次元では第1図に示すように基準座標系を J_s に平行な $x-y$ 平面とすることで、 J_{sx} と J_{sy} の x, y 成分に分解できる。



第1図. J_s の x, y 方向成分.

すなわち、(5)式で導入されたベクトルポテンシャルAを用いれば、二次元の二成分ベクトル拡散方程式が、z方向成分のみのスカラーの拡散方程式となり、三次元の三成分ベクトル拡散方程式が、x方向とy方向間の独立したスカラーの拡散方程式となる。また、このベクトルポテンシャルから得られる磁束密度ベクトルBは(5)式により、自動的に発散条件 $\nabla \cdot B = 0$ を満足する。これは、(8)式から得られる解に非物理的な解であるスプリアス解が存在しないことを意味する。他方、(4)式を直接有限要素法で離散化して解を求めると $\nabla \cdot B = 0$ を満足しないスプリアス解が存在する可能性を意味する。

2.2. システム方程式

(4)式で時間微分 d/dt の項を $d/dt = \lambda$ とおいて書き直せば、

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times B + \lambda \sigma B = f_s, \quad (10)$$

の関係式を得る。次の汎関数 $F(B)$ を考える。

$$F(B) = \int_V \left\{ \frac{1}{\mu} (\nabla \times B)^2 + \lambda \sigma B^2 - 2 B \cdot f_s \right\} dV. \quad (11)$$

いま、 ϵ を数値パラメータ、 ϕ を微分可能で境界で零となるベクトルとして、 $B + \epsilon \phi$ を(11)式に代入し、第1変分 $\delta F(B) = 0$ をとると、

$$\int_V \phi \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times B + \lambda \sigma B - f_s \right\} dV - \int_S \frac{1}{\mu} \phi \cdot [l \times (\nabla \times B)] ds = 0, \quad (12)$$

を得る。ここで、 l は問題空間を取り囲む面積 s に直交する単位法線ベクトル。(12)式から、(11)式は(10)式の汎関数であることがわかる。従って、二次元空間では三角形、三次元空間では四面体に問題領域を分割する。次に、各分割された要素内で節点ベクトルの値を係数とするLagrange型補間関数で解を近似し、(11)式に代入する。各要素で積分して得られる全体の汎関数の極値をとることで、

$$M_B \bar{X}_B + \lambda N_B \bar{X}_B = \bar{F}_B, \quad (13)$$

のシステム方程式が得られる。ここで、全節点数を p とすれば、(13)式の M_B 、 N_B 、 \bar{X}_B 、 \bar{F}_B はそれぞれ、(4)式左辺の第1項と第2項の $3p \times 3p$ の正方行列、さらに B と f_s に対応する $3p$ 次のベクトルである。

次に(8)式で d/dt の項を $d/dt = \lambda$ とおいて書き直せば、

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A - \lambda \sigma A = -J_s, \quad (14)$$

の関係式を得る。次の汎関数 $F(A)$ を考える。

$$F(A) = \int_V \left\{ \frac{1}{\mu} (\nabla A)^2 + \lambda \sigma A^2 - 2 A \cdot J_s \right\} dV. \quad (15)$$

ここで、ポテンシャルAは、二次元では A_z 、三次元では A_x 、 A_y なるスカラーであり、各成分に対して(14)、(15)式が成り立つものとする。さらに、 J_s も二次元では J_{sz} 、三次元では J_{sx} 、 J_{sy} のスカラーである。 ε を数値パラメータ、 ψ を微分可能で境界で零となるスカラーとして、 $A + \varepsilon \psi$ を(15)式に代入し、第1変分 $\delta F(A) = 0$ をとると、

$$-\int_V \psi \left\{ \frac{1}{\mu} \nabla^2 A - \sigma \lambda A + J_s \right\} dV + \int_s \frac{1}{\mu} \psi \frac{\partial A}{\partial l} \cdot l ds = 0, \quad (16)$$

を得る。よって、(13)式と同様な方法により、次のシステム方程式を得ることができる。

$$M_A \bar{X}_A + \lambda N_A \bar{X}_A = \bar{F}_A. \quad (17)$$

ここで、全節点数を p とすれば、 M_A 、 N_A は(14)式の左辺第1項と第2項に対応する $2p \times 2p$ の正方行列、 \bar{X}_A 、 \bar{F}_A はAと J_s に対応する $2p$ 次のベクトルである。

(13)式と(17)式が、それぞれ(4)式と(8)式の支配方程式に対するシステム方程式である。

2.3. モード解析法

(13)式と(17)式のシステム方程式はどちらも同じ形の非同次方程式であるからまとめて、

$$M \bar{X} + \lambda N \bar{X} = Y, \quad (18)$$

と書くことにする。 M 、 N は(13)式に対して M_B と N_B 、(17)式に対して M_A 、 N_A に対応し、ベクトル \bar{X} 、 \bar{Y} は(13)式に対して \bar{X}_B と \bar{F}_B 、(17)式に対して \bar{X}_A と \bar{F}_A に対応するものである。いま、(18)式の同次方程式

$$M \bar{X} + \lambda N \bar{X} = 0, \quad (19)$$

から、行列 M 、 N が p 次の対称行列であり、 N は正定値(Positive Definite)であることから、 N に関して直交する p 個の固有ベクトルを選ぶことができる。これらの固有ベクトル \bar{V}_i ($i = 1 \sim p$)を列ベクトルとする行列 Z (モーダルマトリクス)を

$$Z = (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_p), \quad (20)$$

とする。(18)式の未知ベクトル \bar{X} を(20)式を用いて、

$$\bar{X} = Z \bar{G}, \quad (21)$$

と変数変換を行うことを考えれば、(18)式は

$$[Z^T M Z] \bar{G} + \lambda [Z^T N Z] \bar{G} = Z^T \bar{Y}, \quad (22)$$

となる。ここで(22)式の各行列は、固有ベクトルの直交性から

$$Z^T M Z = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_p \end{bmatrix}, \quad (23a)$$

$$\lambda Z^T N Z = \lambda \begin{bmatrix} n_1 & & 0 \\ & n_2 & \\ 0 & & n_p \end{bmatrix}, \quad (23b)$$

$$Z^T \bar{Y} = (h_1, h_2, \dots, h_p)^T \quad (23c)$$

となる。よって、ベクトル \bar{G} の各要素 g_i ($i=1 \sim p$)は、

$$g_i = \frac{h_i}{m_i + \lambda n_i}, \quad (24)$$

として求まる。 $\lambda = \partial / \partial t$ であるから、 g_{i0} を g_i の初期値として

$$g_i = \left(g_{i0} - \frac{h_i}{m_i} \right) \exp\left(-\frac{m_i}{n_i} t\right) + \frac{h_i}{m_i}, \quad (25)$$

となる。よって、得られたベクトル \bar{G} を(21)式に代入して解ベクトル \bar{X} を得ることができる[8,9]。なお、固有値は $-m_i/n_i$ ($i=1 \sim p$)で与えられる。

2.4. 例題

本稿では、具体的例題として渦電流問題について二次元二成分問題を取り上げる。またベクトル固有値問題として考えたとき、渦電流問題も空洞共振器の問題も全く同じであることから、解析解の存在する三次元空洞共振器を取り上げる。

(a) 二次元二成分問題

二次元問題の例はWongとCendes等が取り上げた、第2(a)図に示すものである[8]。支配方程式は、

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times B + \sigma \lambda B = f, \quad (26)$$

である。Bはxとy成分であり、fはiとjをx, y方向の単位ベクトルとすると

$$f = \{2 + \lambda(y - y^2)\} i + \{2 + \lambda(x - x^2)\} j, \quad (27)$$

であり、境界条件は

$$1 \times B = 0, \quad (28)$$

である。さらに、この問題の解析解は、 $\mu = 1$ 、 $\sigma = 1$ のとき λ の値に無関係に

$$B = (y - y^2) i + (x - x^2) j, \quad (29)$$

で与えられる。また、ベクトルポテンシャル A_z を用いて (26) 式を書き直すと、

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z - \lambda \sigma A_z = -J_s, \quad (30)$$

であり、 J_s は z 方向成分のみであり、大きさは

$$J_s = 2(y - x) + \lambda \left\{ \frac{1}{2} (y^2 - x^2) - \frac{1}{3} (y^3 - x^3) \right\}, \quad (31)$$

となる。さらに、境界条件は

$$\frac{\partial A_z}{\partial l} = 0, \quad (32)$$

である。

第2図 (d) - (i) にそれぞれ (26) 式と (30) 式から得られた結果を各種 λ に対して示してある。第2 (f) 図の $\lambda = 10^{-6}$ のとき、明らかにスプリアスな解の存在が認められる。これに対し第2図 (g) - (i) は、いずれの λ の値でも正しい結果を示している。このことは第1表に示す固有値からも明らかであり、(26) 式から得られる固有値には解析解に一致しない小さな値の固有値が存在する。しかし、(30) 式による固有値はすべて解析解と対応する。以上のことから、ベクトル有限要素法では、単純に支配方程式 (4) を解くとスプリアスな解が発生することがわかる。他方、(5) 式で導入したベクトルポテンシャルを用いる方法では、 $\nabla \cdot B = 0$ の条件を満足しないスプリアスな解は発生しないことがわかる。

第1表. 二次元二成分問題の固有値

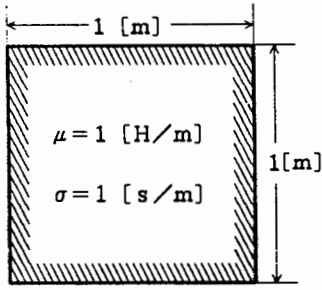
解析解	(26) 式	(30) 式
	0.0001318	
	0.0002790	
	0.0004203	
	0.0005499	
	1.7383928	
	3.3444243	
	3.7226524	
	4.2916346	
	5.7887173	
0.0	8.6516705	0.0000484
9.8696044	10.1962385	10.1841096
19.7392088	.	21.6231994
39.4784176	.	44.6015014
49.3480220	.	57.1971130

(b) 三次元の空洞共振器の固有値問題

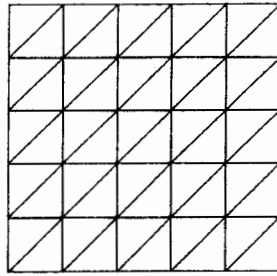
文献[10]によれば、三次元の空洞共振器の TM モードにおける支配方程式は、

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times E - \omega^2 \epsilon_0 E = 0, \quad (33a)$$

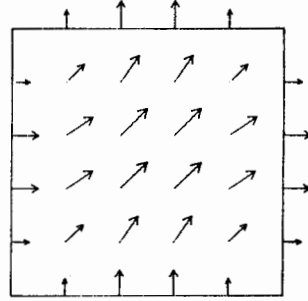
$$1 \times E = 0, \quad (33b)$$



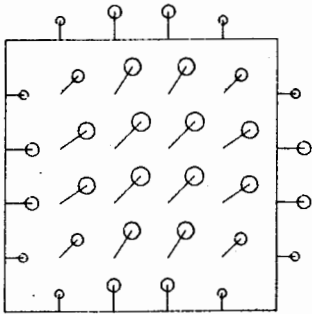
(a) 解析モデル.



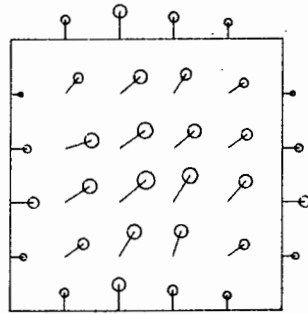
(b) メッシュ.



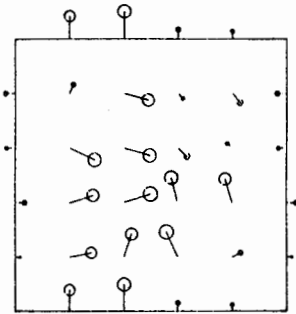
(c) 解析解.



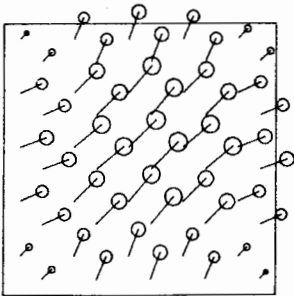
(d) $\lambda=1.0$, (26) 式.



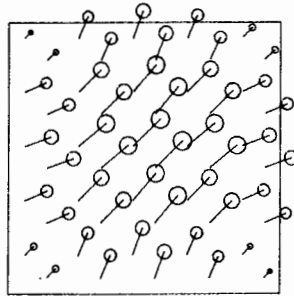
(e) $\lambda=10^{-3}$, (26) 式.



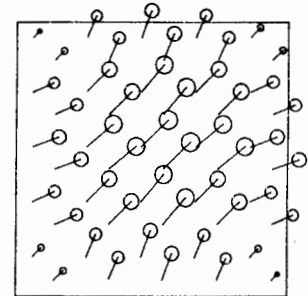
(f) $\lambda=10^{-6}$, (26) 式.



(g) $\lambda=1.0$, (30) 式.



(h) $\lambda=10^{-3}$, (30) 式.



(i) $\lambda=10^{-6}$, (30) 式.

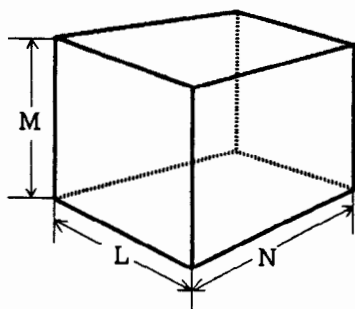
第2図. 二次元二成分問題のモデルと結果.

(d) - (f) : (26) 式による. (g) - (i) : (30) 式による.

で与えられる。ここで、 ϵ_0 と μ_0 は空気中の誘電率と透磁率である。(2)式と比較すれば、 $B \rightarrow E$ 、 $\mu \rightarrow \epsilon_0$ 、 $\sigma \rightarrow \epsilon_0$ 、 $\partial / \partial t \rightarrow \partial^2 / \partial t^2 = -\omega^2$ と対応するから、両者は共通の固有値問題であることがわかる。従って、(33)式をベクトル有限要素法で直接解こうとすれば、必ずスプリアス解が発生する。このため、(2)式に対して行った方法と同様にベクトルポテンシャルを導入し、(8)式の形のx成分とy成分に独立な支配方程式を導き固有値を求める。第3(a)図に示す直方体の空洞共振器について計算した例を第2表に示す。また第3図(c) - (f)の結果から、筆者らの提唱する方法はスプリアスな解を絶対に発生しないことがわかる。

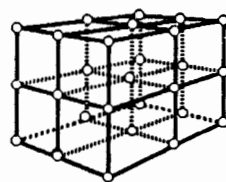
第2表. 三次元空洞共振器の固有値.

モード	解析解	数値解
010	8.1567	8.8102
100	9.8696	10.6280
011	13.9967	17.3835
101	15.7096	19.1089
110	18.0263	21.4065
111	23.8663	31.5305

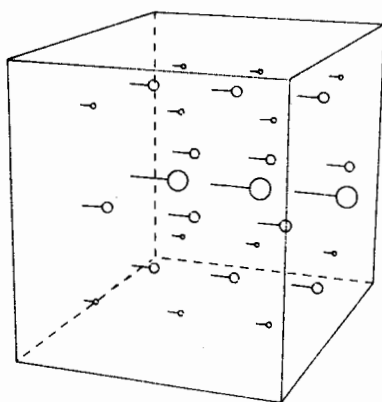


$$L : M : N = 1.0 : 1.1 : 1.3$$

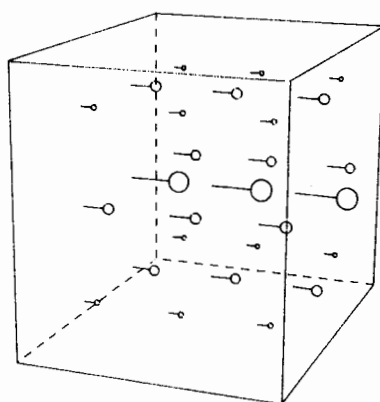
(a) 長方形空洞共振器.



(b) 節点.

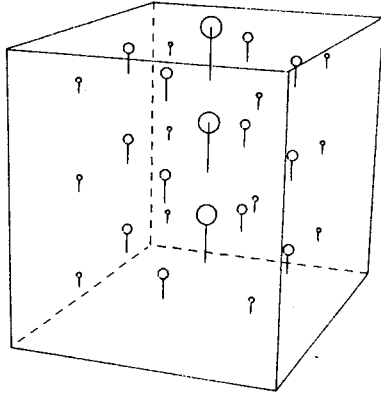


解析解

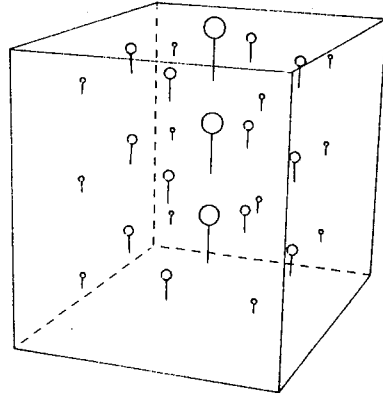


有限要素法 64節点; 固有値 17.3835

(c) 011モード.

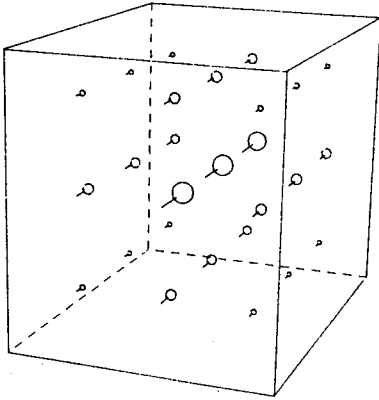


解析解

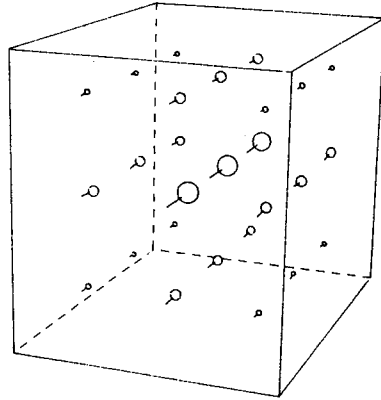


有限要素法 64節点; 固有値 19.1090

(d) 101モード.

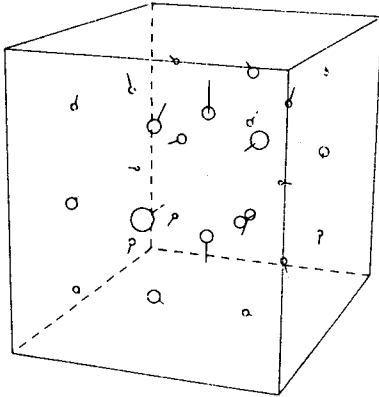


解析解

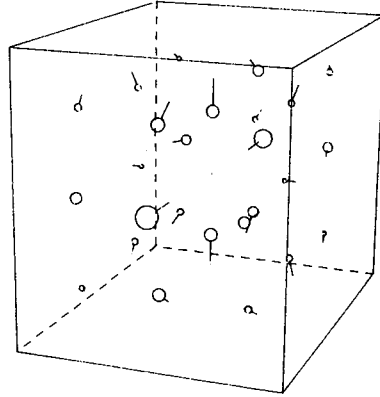


有限要素法 64節点; 固有値 21.4066

(e) 110モード.



解析解



有限要素法 64節点; 固有値 31.5306

(f) 111モード.

第3図. 三次元空洞共振器の解析モデルと計算結果.

3. 結 言

本稿では、渦電流問題を解析する場合のベクトル拡散方程式が本質的には固有値問題であることを示した。その結果、単純にベクトル拡散方程式を有限要素法で離散化し、解こうとすれば、スプリアス解が発生することを示した。スプリアス解を抑圧するためにはベクトルポテンシャルを導入し、スカラーの拡散方程式として解を求めればよいことを示した。特に、二次元の二成分問題は一成分のスカラー問題、三次元の三成分問題は外部入力ベクトルの方向に平行な平面座標系を考えることで各成分が独立なスカラー拡散方程式となる二成分問題に帰することを示した。これは、単純なベクトル有限要素法に比較して二次元二成分問題では1/2、三次元三成分問題では2/3の未知数でシステム方程式が構成でき、しかもスプリアスな解の存在しない結果が得られることを意味する。また、Edge要素を使う方法と異なり、従来の有限要素法で高次要素を使って所望の精度が得られる。

参考文献

- [1] B.M.A. Rahman, et al, " Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-32, No.8, (1984), PP.922-928.
- [2] 松原 他, " 導波路固有モードの有限要素法解析電磁界構成成分を用いる方法," 電子通信学会論文誌, Vol.J69-C, No.5(1986).
- [3] M. Hano, " Finite element analysis of dielectric-loaded waveguides," IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol.MTT-32, No.10(1984), pp.1275-1279.
- [4] 羽野, " 三次元共振器問題の有限要素解析・直方体要素の場合," 電子情報通信学会論文誌, Vol.J70-C, No.6(1987).
- [5] 羽野, " 新しい三角形要素を用いたベクトル有限要素法による異方性導波路の解析," 電子情報通信学会論文誌, Vol.J70-C, No.10(1987).
- [6] 羽野, " 三次元共振器問題の有限要素法解析・四面体要素の場合," 電子情報通信学会論文誌, Vol.J71-C, No.3(1988).
- [7] S.H. Wong, et al, " Combined finite element modal solution of three-dimensional eddy current problems," IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-24, No.6(1988), pp.2685-2687.
- [8] S.H. Wong, et al, " Numerically stable finite element methods for the Galerkin solution of eddy current problem," IEEE Trans. Magn., Vol.MAG-25, No.4(1989), pp.3019-3021.
- [9] 戸川隼人, 有限要素法による振動解析, (サイエンス社, 1975年).
- [10] 細野敏夫, 電磁波工学の基礎, (昭見堂, 1973年).

原稿受付日	平成2年7月3日
-------	----------