

電磁界系逆問題——SPM法による解析——

Inverse Problems in an Electromagnetic Field: Analysis by the SPM Method

斎藤兆古・早乙女英夫* 法政大学工学部・*千葉大学工学部

Y. Saito and H. Saotome*, College of Engineering, Hosei University, and *Faculty of Engineering, Chiba University

The physical and mathematical concepts of the SPM (sampled pattern matching) method are explained, and the method is compared with the least-squares and the minimum-norm methods. Some applications of the SPM method to biomagnetics, non-destructive testing, and electromagnetic device design are described.

Key words: inverse problem, magnetocardiogram analysis, magnetoencephalogram analysis, non-destructive testing, electromagnetic device design

1. はじめに

空間のフィールド源（電流密度 \mathbf{J} 、電荷密度 ρ ）および媒質（透磁率 μ 、誘電率 ϵ 、導電率 σ ）分布からフィールド（磁界 \mathbf{H} 、電界 \mathbf{E} ）あるいは電気ポテンシャル ϕ を求める問題は順問題と呼ばれ、これらは

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) \quad (3)$$

の偏微分方程式を解くことに帰する。ここで、電界 \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (4)$$

である。これらに対し、フィールド（以下、ポテンシャル分布を含めた意味とする）および媒質分布からフィールド源を求める問題は逆問題と呼ばれ、特にこのフィールド源を未知数とする問題を IS (inverse source) 問題と呼ぶ¹⁾。ただし、空間のすべてに亘ってフィールドおよび媒質分布が既知の場合には、求めようとするフィールド源の座標における (1)~(3) 式の微分演算により解が得られ、この種の問題は逆問題ではなく直接問題と呼ばれる¹⁾。この場合、解を求める演算は異なる座標のフィールド源および媒質に影響されない。また、CT (computed tomography) に代表されるような空間の媒質分布同定問題も逆問題の一つであり、IS 問題に対して IP (inverse parameter) 問題と呼ぶ¹⁾。

IS 問題の支配方程式は、順問題が微分型で表現されているのに対し、フィールド源存在領域 V についての体積分となる。

$$\mathbf{H} = \nabla \times \int_V G \mathbf{J} dv \quad (5)$$

$$\phi = \int_V G \frac{\rho}{\epsilon} dv \quad (6)$$

$$\phi = \int_V G \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) dv \quad (7)$$

ここで、 G は \mathbf{H} または ϕ とフィールド源との距離 r によって決まるグリーン関数で、3次元空間では

$$G = \frac{1}{4\pi r} \quad (8)$$

となる。また、(7) 式は電磁誘導電流は考えない保存力場の方程式であり、 $\nabla \cdot \mathbf{J}$ は電源から流出入する電流密度の発散である。

IS 問題解析の最大の課題は、既知量である (5)~(7) 式の左辺が問題空間において部分的にしか与えられず、解の一意性が一般に保証されない点である。このため、統計的手段（例えば最小2乗法、相関係数法など）や支配方程式にある拘束条件を課して解く方法（例えば最小ノルム法など）による解析が行われている^{2)~4)}。

筆者らはフィールドの重畳積分に基づく逆問題解析法である SPM (sampled pattern matching) 法を提唱し、眼磁図・心磁図・脳磁図などの生体磁界情報の解析、金属の非破壊検査および電磁機器のコイル配置・磁心形状設計を行ってきた^{5)~17)}。ここでは、SPM 法の概要について触れ、そのいくつかの応用例を示す。なお、解析における細かな条件などについては参考文献を参照されたい。

2. SPM 法

2.1 重畳積分による逆問題解析

ここでは Fig. 1 に示した磁界系を例に、SPM 法による逆問題解析について解説する。空間に分布した電流密度 \mathbf{J} によって斜線の面に生ずる z 方向磁界を H_z とし、その測定値を $H_{mz}(X, Y)$ とする。このように逆問題ではフィールド情報は空間の一部でのみ与えられ、この部分以外の座標にあるフィールド源を推定しなければならない。よって、磁界系の場合には (5) 式を解かなければならない。ここでは簡単のため、測定磁界は z 方向成分のみとしたので、求

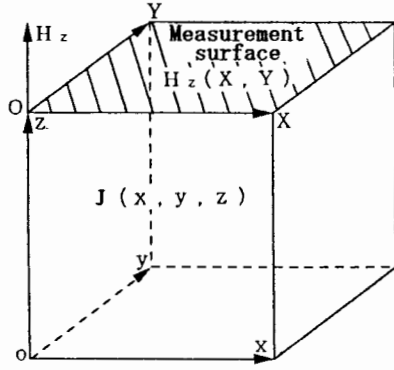


Fig. 1 Magnetostatic field model for the analysis.

める電流密度 \mathbf{J} は x - y 平面に平行な成分のみである。したがって、(5)式によって測定面に与えられる磁界 H_z は、 \mathbf{J} の位置座標 (x, y, z) およびその x - y 平面上の x 軸からの角度 ϕ 、さらに測定面座標 (X, Y) の関数となり、 $H_z(X, Y, x, y, z, \phi)$ として表される。

SPM 法では、 $H_{mz}(X, Y)$ および $H_z(X, Y, x, y, z, \phi)$ が一致したときに最大値 1 となる規格化された評価関数

$$\gamma_1(x, y, z, \phi) = \frac{1}{\|H_{mz}\| \|H_z\|} \iint H_{mz} H_z dX dY \quad (9)$$

に基づいてフィールド源推定を行う。ここで、 $\|\cdot\|$ はノルムを表し、

$$\|H_{mz}\| = \sqrt{\iint H_{mz}^2 dX dY} \quad (10a)$$

$$\|H_z\| = \sqrt{\iint H_z^2 dX dY} \quad (10b)$$

である。(9)式は測定および評価磁界パターンの重畳積分(畳み込み積分)であり、 $J(x, y, z, \phi)$ によって与えられる H_z の H_{mz} に対する応答、言い換えれば H_{mz} 空間波形に対する基底関数 H_z のスペクトル(重み)を求めていることになる。ただし、この基底関数は、フーリエ級数展開のように基底関数間の直交性はなく、フーリエ変換のような非直交連続基底関数の一つと考えられる¹⁰⁾。このスペクトル γ_1 は x - y - z - ϕ 空間の関数で、これをもって解とすることができるが、SPM 法では次のような非線形重み付けをさらに行う。(9)式で x - y - z - ϕ 空間中最大値をとった γ_1 を生じた H_z を H_{z1} とし、これについて重み付けをした新しいスペクトル分布

$$\gamma_2(x, y, z, \phi) = \frac{1}{\|H_{mz}\| \|H_{z1} + H_z\|} \times \iint H_{mz} (H_{z1} + H_z) dX dY \quad (11)$$

を x - y - z - ϕ 空間に対して求める。同様の演算を $\gamma_{i-1} < \gamma_i$ の条件が成立する限り行い、最終的に h 回の演算をしたとすると、

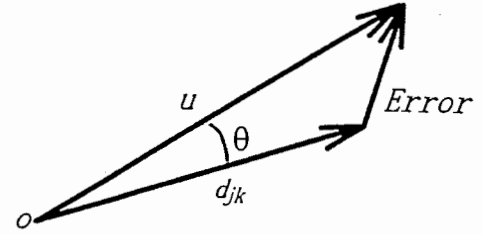


Fig. 2 Field pattern vector evaluation.

$$\gamma(x, y, z, \phi) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \gamma_i(x, y, z, \phi) \quad (12)$$

を得ることができる。SPM 法ではこの $\gamma(x, y, z, \phi)$ をスペクトル解としている。また、 γ_i の最大値のみから成る解パターンをパイロットポイント解と呼んでいる¹⁾。

(9) および (11) 式の演算を計算機で行うことを考える。まず、測定面上に n 個の z 方向磁界測定点があるものとし、その測定磁界パターンベクトルを

$$\mathbf{u} = [H_{mz1} \ H_{mz2} \ \cdots \ H_{mzn}]^T \quad (13)$$

とする。次に、磁界源推定領域を m 個の微小体積に分割し、さらに電流密度 \mathbf{J} の x - y 平面上の角度分割を m' とする。離散化された空間の j 点における k 方向の電流密度とその点の微小体積との積(電流双極子)が測定面に与える磁界パターンベクトルを

$$\mathbf{d}_{jk} = [H_{jkz1} \ H_{jkz2} \ \cdots \ H_{jkzn}]^T \quad (14)$$

とする。磁界パターンベクトル \mathbf{u} および \mathbf{d}_{jk} を用いると(9)式の演算は

$$\gamma_{1jk} = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{d}_{jk} / (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{d}_{jk}\|) \quad (15)$$

となり、磁界源評価空間 V についての x - y - z - ϕ は j - k ($j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, m'$) と書き換えられた。(11)式の演算も同様になり、離散値系において(12)式の解パターンが得られる。

\mathbf{d}_{jk} の \mathbf{u} に対する評価を RMS (root mean square) 誤差にて行うと

Error

$$= \sqrt{(H_{mz1} - H_{jkz1})^2 + (H_{mz2} - H_{jkz2})^2 + \cdots + (H_{mzn} - H_{jkzn})^2} \quad (16)$$

となる。これを評価関数として用いると、Fig. 2 の誤差ベクトルを最小とする解が得られる。一方、(15)式の評価は Fig. 2 の $\cos \theta$ に対応し、これは \mathbf{u} および \mathbf{d}_{jk} の大きさに無関係に決まる。また、(16)式に基づく最小 2 乗法では基本的に測定磁界との誤差が最小となる一つの磁界源を求めるのに対し、SPM 法では複数の磁界源によって構成される解の空間パターンを求める。すなわち、SPM 法は、可能性のある解すべてについて個々に重み付け評価を行い、その重みのフィールド源推定領域に亘る空間分布を求める手法である。

2.2 最小ノルム法との比較

最小ノルム法は、SPM法と同様、複数個のフィールド源から成る解パターンを得る方法で、系の支配方程式にある拘束条件を課して一意的な解を得るものである。その拘束条件は、その名の通り、無数にある解ベクトルの内そのノ

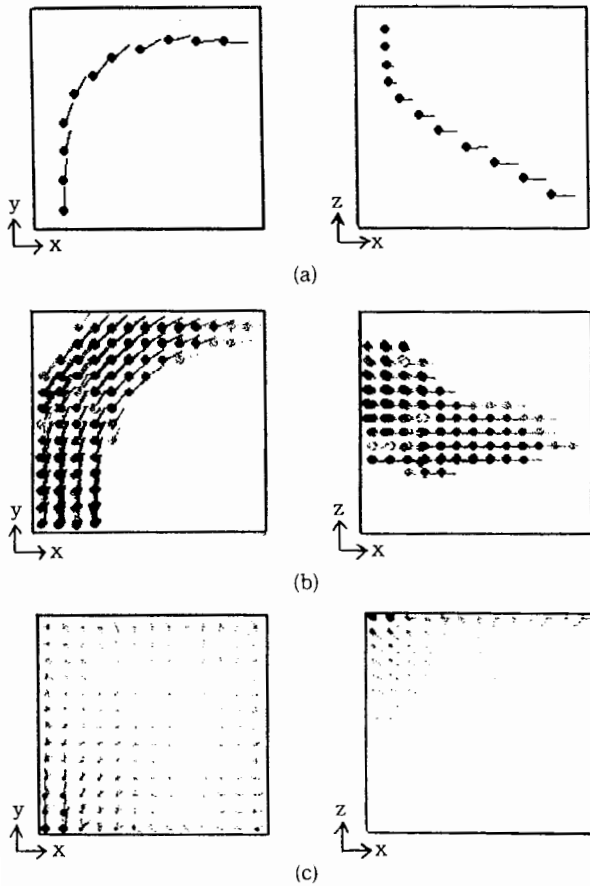


Fig. 3 Comparison of the SPM and minimum-norm methods: (a) correct distribution of magnetic field sources, (b) magnetic field source distribution obtained by the SPM method, (c) magnetic field source distribution obtained by the minimum-norm method.

ルムが最小となることで、これはちょうど x - y 平面内の直線上で原点からの法線ベクトルの大きさが最小である座標を求めることに例えられる。

Fig. 1 の解析モデルの空間中に Fig. 3(a) のような螺旋状電流があるとき、SPM および最小ノルム法によってこれを推定したものを Fig. 3(b) および (c) にそれぞれ示す¹²⁾。SPM 法は正解の電流分布に対してある幅をもった解を与えるがほぼ螺旋状の解のパターンを示した。これに対し、最小ノルム法は正解とは全く異なる解を出すことがわかる。これは、支配方程式に課する拘束条件（最小ノルム）がこの例題の物理的条件に全く無関係であるために生じたもので、磁界源の振幅が小さくて済む測定面近辺に解が集中したためである。一方、SPM 法の解の幅は基底関数の非直交性から生じたもので、解の可能性を広くとる本手法が本質的にもつ性質である。

3. 応用例

3.1 心磁図・脳磁図解析

SQUID 磁束計によって fT レベルの微弱磁束密度が測定可能となり、心磁図・脳磁図などの計測・解析が盛んに行われているが、その解析法の多くは最小 2 乗法、相関係数法および最小ノルム法によるものである^{2)~4)}。本節では SPM 法による心磁図および脳磁図の解析例を示す。

Fig. 4 は、心電図上の P 波¹⁸⁾ における心磁図¹⁹⁾ から推定した心臓内の磁界源分布である。図中の太線は心臓、大動脈、および大静脈の輪郭を示し、点線は肋骨を明示したものである。また、心磁図データの測定面は円形とした。Fig. 4(a) および (b) は、それぞれ健常者および右心房過負荷状態の患者の心磁図を解析したものである。健常者心磁図の解析結果は洞結節 (sinoatrial node)²⁰⁾ から房室結節 (atrioventricular node)²⁰⁾ にかけて解が現れており、これは医学的所見と一致している¹⁹⁾。一方、右心房過負荷状態患者の心磁図解析結果は、洞結節以外に右心室 (円内中央下部) に磁界源が見られ、健常者のそれとは大きく異なる

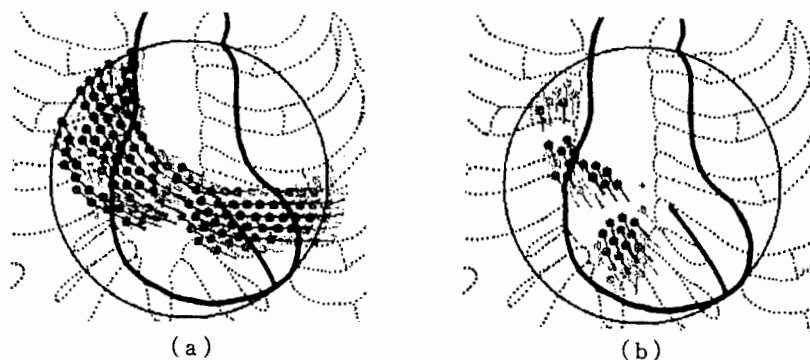


Fig. 4 Magnetic field source distribution in the human heart obtained under atrial excitation: (a) normal subject, (b) subject with pulmonary hypertension.

ものとなった。心磁図を読み取るためには経験を要するが、このような逆問題解析を行うことでより直接的な医療情報を得ることができる。

心磁図は平面上の磁界パターンであるが、脳磁図計測については球面上の法線磁界が測定できる SQUID 磁束計が開発されている²¹⁾。また、この SQUID 磁束計を用いた脳磁図のてんかん検査への臨床応用が行われている²²⁾。一方、この SQUID 磁束計を用いて聴性誘発脳磁図を計測した例²³⁾があり、これを SPM 法で解析した結果を Fig. 5 に示す。主な解が現れた部分は、第 1 次聴覚野および聴覚連合野である²⁰⁾。

3.2 金属中の欠損探査

金属板材などの 2 次元導電場に電流を流し、金属表面電位（電気ポテンシャル）分布より材料の欠損探査を行うことができる。このとき、欠損が電気ポテンシャルの測定領域以外にあると直接問題として扱うことはできず、媒質推定に関する逆問題（IP 問題）となる。本節ではこの IP 問題をこれと等価な IS 問題に変換し、複数個ある 2 次元金属材料中の欠損探査を SPM 法で行った例を示す^{13), 14)}。

この IP 問題から IS 問題への変換のキーアイデアは、まず欠損を含んだ場を均一媒質場とみなし、次に欠損と等価なフィールド源を考えることである。このフィールド源

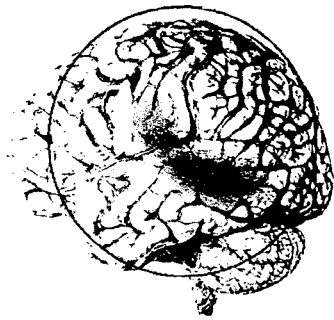


Fig. 5 Magnetic field source distribution in the brain obtained after a normal subject had heard the sound "ah".

は欠損による電気ポテンシャル分布の乱れを生じ、これを用いて (7) 式よりこのフィールド源を推定することができる。欠損がないときの電気ポテンシャル ϕ および電流密度 J の関係は

$$-\sigma \nabla \phi = J \quad (17)$$

となり、欠損があるときの電気ポテンシャル ϕ_d は欠損による電流密度の乱れ J_s を用いて

$$-\sigma \nabla \phi_d = J + J_s \quad (18)$$

と表される。ここで、(17) と (18) 式の差をとり、欠損によって生ずる電気ポテンシャルの乱れを ϕ_s とすると

$$J_s = -\sigma \nabla \phi_s \quad (19)$$

となる。(19) を (7) 式の J として用いると

$$\phi_s = \int_V G \nabla \cdot \left(\frac{J_s}{\sigma} \right) dv \quad (20)$$

を得る。以上により、IP 問題を局所的に既知である ϕ_s を用いてフィールド源 $\nabla \cdot J_s$ について解く IS 問題へ変換することができた。なお、 J_s は欠損表面座標から流出入する等価電流密度と考えることができる。

電気ポテンシャル測定による 2 次元金属材料中の欠損推定を Fig. 6 に示す。Fig. 6(a) は円形測定線内にある三つの欠損を示すもので、図示した円形内に平行電流を流し、測定線上の電気ポテンシャルの乱れによりこれらの推定をする。なお、推定精度を上げるため、平行電流を供給する角度を変えてその蓄積データを用いる。このプロセスは本質に CT のそれと等価である。Fig. 6(b) は SPM 法による解析結果を示すもので、三つの欠損をほぼ同定することができた。

欠損の存在によって生ずる J_s は円形測定線上に磁界の乱れを同時に生じ、この磁界測定に基づく欠損推定結果を Fig. 7(a) に示す。また、Fig. 6(b) および Fig. 7(a) の結果の積をとったものを Fig. 7(b) に示す。この磁界・電気ポテンシャル併用法により、欠損探査精度の向上が図れることがわかる。なお、本併用法は、心磁図・心電図併用による心臓診断に適用すべく現在研究中である²⁴⁾。

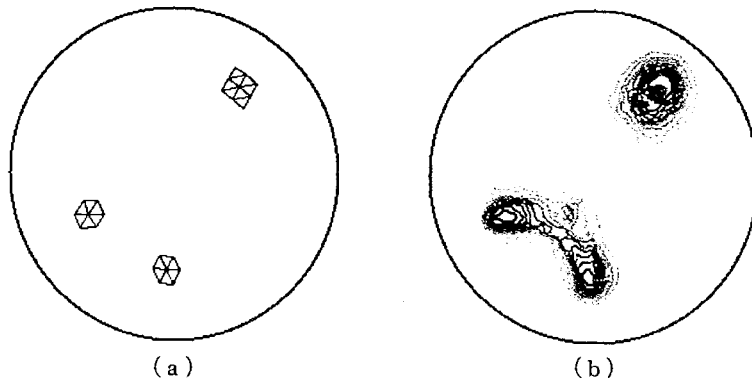


Fig. 6 Defect identification by the electric potential method: (a) defect configuration, (b) estimated result.

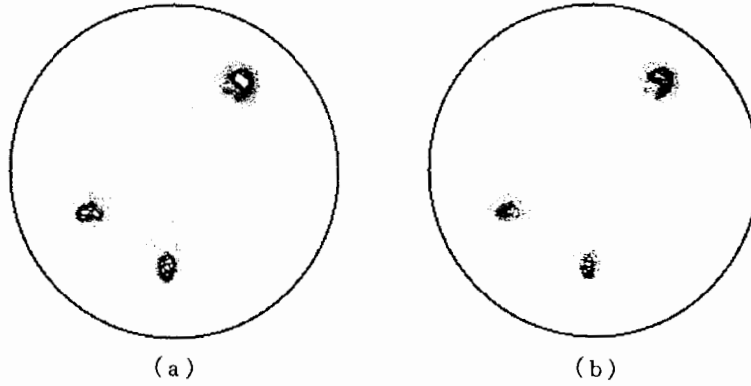


Fig. 7 Defect identification: (a) by measuring the magnetic field, (b) by calculating the product of Fig. 6(b) and Fig. 7(a).

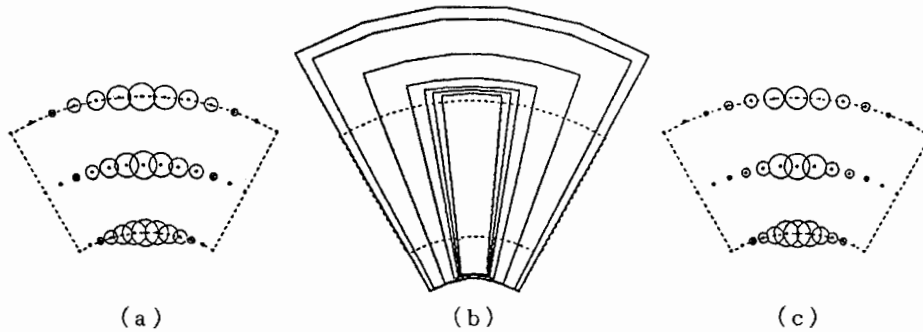


Fig. 8 Coil configuration design: (a) specification of the magnetic field, (b) designed coil configuration, (c) designed magnetic field.

3.3 電磁機器の設計問題

電磁界の方程式は離散化して

$$Ax=b \quad (21)$$

と書ける。ここで、ベクトル x および b はそれぞれフィールドおよびフィールド源を表す。また、行列 A は問題空間の形状および媒質分布により決まる。ここでは、フィールドの仕様に対し、SPM 法の評価関数 (9) 式を基にした二つの設計問題を扱う。

最初の問題は、媒質分布 A が既知のときに所望のフィールドを得るためのコイル配置、すなわちフィールド源分布 b を求める問題である。Fig. 8(a) に示すように、扇形平面の円周方向に対して法線方向正弦波起磁力分布を得る問題を考える。ここで、透磁率分布は一様とし、Fig. 8(a) に示した円の大きさはこの面の法線方向磁界の大きさ (仕様) を表している。この仕様を 3.1 で述べた心磁図・脳磁図に対応させて考えれば、この種の設計問題は IS 問題そのものであることがわかる。IS 問題として SPM 法により設計したコイル配置およびそれによって生ずる磁界の実測パターンを Fig. 8(b) および (c) にそれぞれ示す¹⁶⁾。この場合、フィールド源の 1 要素は、Fig. 8(b) に示した 1 ターンの扇形のループ電流である。Fig. 8(a) および (c) から、SPM 法による設計アルゴリズムの有効性がわかる。

次の問題は、Fig. 9 に示すような磁心形状の設計で、

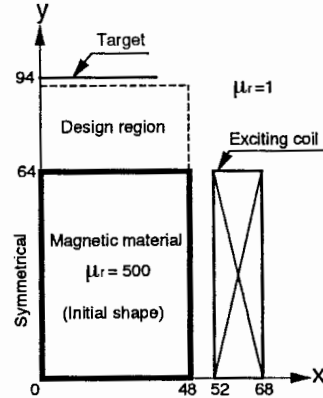


Fig. 9 Magnetic core shape design.

(21) 式の A および b の双方を求める問題である。Target 面に y 方向の平等磁界、さらに x 方向の磁界が零となる仕様を与え、Fig. 9 の太線で示した磁心の初期形状から徐々に Target 面方向に磁心を成長させて仕様を最も満足する形状を求める。ここで SPM 法は 2.1 で述べたように、フィールドの大きさに無関係に設計フィールドの評価が行えるので、Fig. 9 のようにコイル配置が決まっている場合には b の大きさに関係なく A を設計することができる。そして A の決定後これに対して最適な b 、すなわち励磁電流の大きさを定めることができる。しかしながら最小 2 乗法に基づく設計では A と b の双方を同時に決める必要が

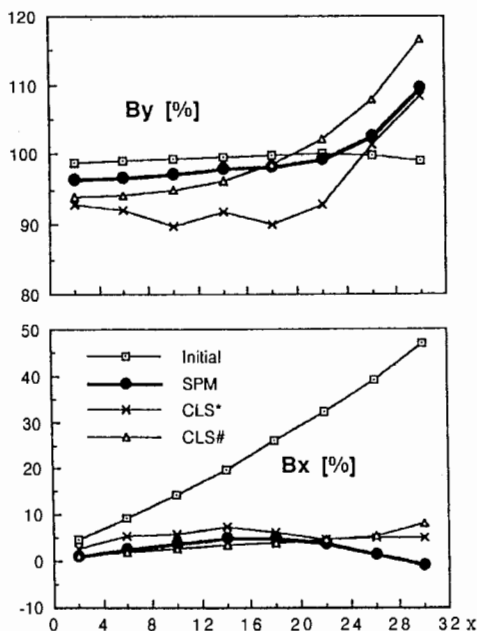


Fig. 10 Comparison of the target fields designed by using different objective functions.

あり、設計アルゴリズムが複雑になる。Fig. 10はSPM法および最小2乗法による本例題の設計磁界パターンを示すもので、最小2乗法の場合の励磁電流値は、初期形状で100%の B_y を与える値に固定(CLS*)およびSPM法による最終設計値を用いる(CLS#)の2ケースとした。初期形状、SPM、CLS*およびCLS#の仕様との誤差は、それぞれ27.8、5.5、9.5、および8.8%で、SPM法による結果が最も良かった¹⁷⁾。

4. おわりに

逆問題解析手法として筆者らが提唱しているSPM法の概要について最小2乗法および最小ノルム法との対比をしながら述べるとともに、生体磁気情報の解析、金属材料の非破壊検査および電磁機器の設計例題への本手法の応用について解説した。逆問題解析は1823年のN. H. Abelによるもの²⁵⁾が最初と思われる、また、これからも発展を続ける古くて新しい問題である。本稿が逆問題への興味のきっかけとなれば幸いである。

参考文献

- 1) 斎藤兆古: 電気学会論文誌 A, **114**, 432 (1994).
- 2) 内川義則, 長谷川敏, 合原一幸, 小谷 誠: 日本応用磁気学会誌, **13**, 508 (1989).
- 3) 内川義則, 小谷 誠: 電気学会論文誌 A, **112**, 127 (1992).
- 4) J.-Z. Wang and S. J. Williamson: *IEEE Trans. Magn.*, **39**, 665 (1992).
- 5) Y. Saito, E. Itagaki, and S. Hayano: *J. Appl. Phys.*, **67**, 5839 (1990).
- 6) 早乙女英夫, 橘田和泰, 早野誠治, 斎藤兆古: 電気学会論文

誌 A, **112**, 279 (1992).

- 7) 早乙女英夫, 橘田和泰, 早野誠治, 斎藤兆古: 電気学会論文誌 C, **113**, 69 (1993).
- 8) H. Saotome, K. Kitsuta, S. Hayano, and Y. Saito: *IEEE Trans. Magn.*, **29**, 1389 (1993).
- 9) H. Saotome, T. Doi, S. Hayano, and Y. Saito: *IEEE Trans. Magn.*, **29**, 1861 (1993).
- 10) H. Saotome, K. Kitsuta, S. Hayano, and Y. Saito: *Int. J. Appl. Electromag. Matrls. Elsevier*, **3**, 297 (1993).
- 11) H. Saotome and Y. Saito: *IEEE Trans. Magn.*, **29**, 3343 (1993).
- 12) 早乙女英夫, 早野誠治, 斎藤兆古: 電気学会論文誌 A, **114**, 514 (1994).
- 13) 土井達也, 早野誠治, 斎藤兆古: 電気学会マグネティックス研究会, **MAG-94-25**, 53 (1994).
- 14) 土井達也, 早乙女英夫, 早野誠治, 斎藤兆古: 電気学会論文誌 A, **114**, 290 (1994).
- 15) T. Doi, S. Hayano, I. Marinova, N. Ishida, and Y. Saito: *J. Appl. Phys.*, **75**, 5907 (1994).
- 16) 加藤俊行, 石沢 整, 早野誠治, 斎藤兆古: 電気学会マグネティックス研究会, **MAG-94-26**, 63 (1994).
- 17) 早乙女英夫, 斎藤兆古, J. L. Coulomb, J. C. Sabonnadiere: 電気学会マグネティックス研究会, **MAG-94-117**, 39 (1994).
- 18) 渥美和彦, 小谷 誠, 上野照剛: バイオマグネトロニクス入門 (オーム社, 東京, 1986).
- 19) A. Takeuchi, K. Watanabe, M. Nomura, S. Ishihara, M. Sumi, M. Murakami, K. Saito, Y. Nakaya, and H. Mori: *J. Electrocardiol.*, **21**, 161 (1988).
- 20) A. J. Vander, J. H. Sherman, and D. S. Luciano: *Human Physiology—The Mechanisms of Body Function—* (McGraw-Hill).
- 21) 金子 裕, 高倉公明: 日本臨床, **49**, 255 (1991).
- 22) 金子 裕, 高倉公明: *Brain and Nerve*, **44**, 307 (1992).
- 23) 栗城真也, 竹内文也: 第7回日本生体磁気学会大会論文集, **5**, 20 (1992).
- 24) 土井達也, 早野誠治, 斎藤兆古: 電気学会マグネティックス研究会, **MAG-94-46**, 87 (1994).
- 25) G. Anger: *Inverse Problems in Differential Equations* (Plenum Press, 1990).

(1994年10月20日受理)



斎藤兆古 さいとよしふる

昭44法政大学工学部電気工学科卒, 昭50同大学院工学研究科博士課程修了, 同大学助手, 昭51同大学講師, 昭53同大学助教授, 昭62同大学教授, 現在に至る。
専門 計算電磁力学 (工博)



早乙女英夫 さおとめひでお

昭56法政大学工学部電気工学科卒, 昭58同大学院工学研究科博士前期課程修了, 富士電機(株)入社, 平6同大学院工学研究科博士後期課程修了, 千葉大学工学部電気電子工学科助手, 現在に至る。
専門 パワーエレクトロニクス (工博)