

磁化特性の表現とその応用

A Representation of Magnetization Characteristics and Its Applications

斎藤兆古・早野誠治 法政大学工学部

Y. Saito and S. Hayano, College of Engineering, Hosei University

A Chua type magnetization model is presented and compared with the other models. As a result, it is revealed that the Chua type model is closely related with the Preisach and Hodgdon type models. Furthermore, it is shown that the Chua type model yields the Rayleigh relationships in the weakly magnetized region. Physical background of the Chua type model is given by means of the domain theory. Finally, some application examples provide the useful relationships concerning with the iron loss and skin depth.

1. はじめに

アモルファス磁性材料で代表される新磁性材料の出現と小型軽量化の要求から、磁気装置のより精密な設計、解析が必要となっている。筆者らはこのような現状に鑑み、デジタル計算機を前提とした磁化特性の表現法を検討し、その有用性を報告して来た^{1)~4)}。本稿では、筆者らの提唱してきた Chua 型モデル、古典 Chua 型モデル⁵⁾、Hodgdon の数学的モデル⁶⁾さらに Preisach 型モデル⁷⁾を比較検討し、これらのモデル間の関係を明らかにする。次に、短冊状磁区モデルを用いて Chua 型モデルのパラメータに関する物理的意味を吟味する。

最後に、線形モデルを用いて、鉄損や表皮効果などを表す有用な関係式を与える。

2. 磁化特性モデル

2.1 Chua 型モデル

磁性材料の磁気飽和特性を表す曲線で、過去の磁気履歴や周波数に無関係にユニークに決定される曲線は理想磁化曲線である。これは理想磁化曲線が過去の履歴を交流磁界で打ち消して得られるためであり、磁束密度 B と H の関係は、透磁率を μ とし次式で与えられるものとする。

$$H = (1/\mu)B \quad (1)$$

次に、磁界 H と磁束密度 B のそれぞれの微小変化を ΔH , ΔB とすれば、両者の関係を結合するパラメータと

して増分透磁率 μ_d が知られている。増分透磁率 μ_d の中で、過去の磁気履歴に無関係にユニークとなる増分透磁率は理想磁化曲線測定時に得られるものである。 ΔH と ΔB の極値では、増分透磁率は微分透磁率となり、

$$\mu_d = \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H} = \frac{dB}{dH} = \frac{dB/dt}{dH/dt} \quad (2)$$

が成り立つ。したがって、この場合、増分透磁率は可逆透磁率 μ_r と実質的に同じであるから

$$\mu_r(dH/dt) = dB/dt \quad (3)$$

が成り立つ。(1)式で与えられる飽和特性が静的な磁化特性を表し(3)式が動的な磁化特性を表すから、両者の和が全体の磁化特性を表すこととなる。(3)式の次元を(1)式の次元と一致させるため、ヒステリシス係数 s [Ω/m] を導入し、全体の磁界を考えると

$$H + (\mu_r/s)dH/dt = (1/\mu)B + (1/s)dB/dt \quad (4)$$

の関係を得る。(4)式が筆者らが提案する磁化特性モデルである^{1)~4)}。また、古典 Chua 型モデルは、(4)式で $\mu_r = 0$ とし与えられる^{5), 8)}。

2.2 Hodgdon の数学的モデル

Hodgdon は、次式で表される数学的モデルを提案している⁶⁾。

$$dH/dt = \alpha |dB/dt| |f(B) - H| + g(B, dB/dt) dB/dt \quad (5)$$

ここで、 α は物質に依存するパラメータであり、 f は磁束密度 B の一価関数、さらに g は磁束密度 B とその時間微分 dB/dt の一価関数である。(5)式を $f(B) > H$ とし変形すると

$$H + \frac{1}{\alpha |dB/dt|} \frac{dH}{dt} = f(B) + \frac{g(B, dB/dt)}{\alpha |dB/dt|} \frac{dB}{dt} \quad (6)$$

となる。(6)式と(4)式を比較して、 $f(B) = (1/\mu)B$, $g(B, dB/dt) = 1/\mu_r$ さらに $g(B, dB/dt)/\alpha |dB/dt| = 1/s$ とそれぞれ対応するから、Hodgdon のモデルは実質的に(4)式で与えられる Chua 型モデルと等価のものであることがわかる。

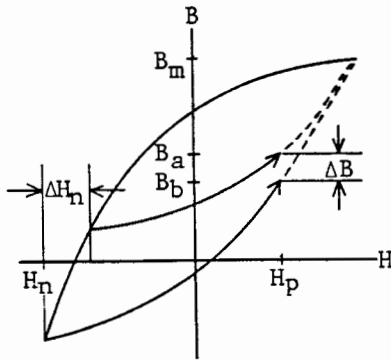


Fig. 1 Definition of H_p and H_n .

2.3 Preisach 型モデル

各磁区が単位角型ヒステリシスループを持つとして、Preisach 型モデルが導かれる^{1),7)}。しかし、本稿では現象論的観点から Preisach 型モデルを導く。Fig. 1 に示すように飽和に至る以前に磁界を反転させたとき、その後の軌跡は反転時の磁界 H_n によって異なる。したがって、反転時の磁界 H_n に対する上昇曲線の微分透磁率 $\partial B/\partial H_p$ の変化率

$$\phi = \partial^2 B / \partial H_p \partial H_n \quad (7)$$

は、反転時の磁界 H_n が飽和値に達していない場合、有限の値となる。この値が Preisach の分布関数に対応する。

逆に、この Preisach の分布関数 ϕ が与えられている場合、磁界 H_n と H_p に関して積分することで磁化特性を再現することができる。(4) 式の Chua 型モデルと (7) 式の Preisach 型モデルの関係を探るため、(4) 式の μ_r, s が一定値と仮定し、Fig. 1 の磁化状態を表すと

$$H_p + (\mu_r/s) dH_p/dt = (1/\mu) B_a + (1/s) dB_a/dt \quad (8)$$

$$H_p + (\mu_r/s) dH_p/dt = (1/\mu) B_b + (1/s) dB_b/dt \quad (9)$$

が成り立つ。(8) 式から (9) 式を引算し、変形すると

$$(1/\mu)(B_a - B_b) = (1/s)(dB_b/dt - dB_a/dt) \quad (10)$$

の関係を得る。ここで、 $dB_b/dt - dB_a/dt = (\partial B_b/\partial H_p - \partial B_a/\partial H_p) dH_p/dt$ と変形し Fig. 1 で $\Delta H_n \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta B = B_a - B_b$ も零に近づくから、 $\Delta H_n \rightarrow 0$ のとき $\Delta H_n = \Delta B/\mu$ と仮定すれば

$$s = \lim_{\Delta H_n \rightarrow 0} \left(\frac{\mu}{\Delta B} \right) \left(\frac{\partial B_b}{\partial H_p} - \frac{\partial B_a}{\partial H_p} \right) \frac{dH_p}{dt} \\ = \frac{\partial^2 B}{\partial H_n \partial H_p} \frac{dH_p}{dt} \quad (11)$$

の関係を得る。したがって、(4) 式の Chua 型モデルのヒステリシス係数 s と (7) 式の Preisach の分布関数 ϕ は、

$$s = \phi(dH/dt) \quad (12)$$

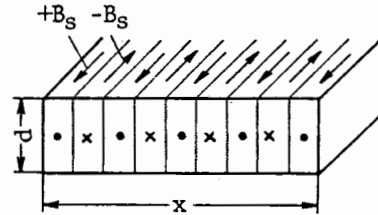


Fig. 2 Barlike magnetic domain model.

で関係づけられることとなる。

次に、(12) 式の関係を用いて (4) 式の Chua 型モデルを変形すると、 $dB/dt = (\partial B/\partial H) dH/dt$ であるから

$$H + (\mu_r/\phi) = (1/\mu) B + (1/\phi) \partial B/\partial H \quad (13)$$

となる。(13) 式を ϕ, μ_r, μ を一定値としさらに対称なヒステリシスループを前提として解くと

$$B = \mu(H_n + H_p) + (\mu^2/\phi) [1 - (\mu_r/\mu)] \{ \exp[-(\phi/\mu) \times (H_p + H_n)] - 1 \} - B_n \exp\{-(\phi/\mu)(H_p + H_n)\} \quad (14)$$

$$B_n = \mu H_n + [\mu H_n - (\mu^2/\phi) + (\mu \mu_r/\phi)] \times \tanh[(\phi/\mu) H_n] \quad (15)$$

となる。ここで、(14) 式の指数部と (15) 式的双曲線関数部をテイラー展開し第 3 項までとると、(14) 式は、

$$B = (\mu_r + \phi H_n) H_p + (\phi/2)(H_p^2 - H_n^2) \quad (16)$$

となる。(16) 式は、磁界 H_p と H_n が十分小さいことを前提としているから、明らかに Rayleigh ループを表していることとなる⁹⁾。したがって、(4) 式の Chua 型モデルと (5) 式の Hodgdon モデルは、Rayleigh の関係式を満足するが、(4) 式で $\mu_r = 0$ とした古典 Chua 型モデルは Rayleigh の関係式を満足しないこととなる。さらに、(7) 式の Preisach 型モデルは、Rayleigh の関係式を高磁化領域へ拡張したものにほかならないことを意味している。

2.4 物理的背景

強磁性体は自発磁化を持つ磁区から構成され、外部磁界に応じて自発磁化の方向が変化し磁化が行われることは周知の事実である。ここでは、磁区の挙動と磁化特性の関係を探るため、Fig. 2 の短冊状磁区モデルを考える。Fig. 2 で、外部磁界 H のとき、外部磁界 H の方向に n 個の磁区の方向が一致しているとすれば

$$B = \mu_0 H + n B_s = \mu_0 H + M \quad (17)$$

が成り立つ。ここで、 B_s は各磁区の飽和磁束密度であり、 M は磁化ベクトルである。(17) 式を変形して

$$B = \mu_0 [1 + (M/\mu_0 H)] H = \mu H \quad (18)$$

の関係が得られる。したがって、透磁率 μ は外部磁界 H に応じた方向にそろった磁区の個数 n に対応する。磁区

の方向が外部磁界に応じて変化するとき、物理的な運動であるため磁壁間に生ずる摩擦損失と渦電流損失を正方向と負方向の交流バイアス磁界でキャンセルさせて(18)式の透磁率 μ が測定されたとする。このとき得られる透磁率 μ は過去の磁気履歴に無関係な各磁区状態の特性を表す理想磁化曲線の透磁率となる。次に(17)式の時間微分をとると

$$\begin{aligned} dB/dt &= \mu_0 dH/dt + B_s dn/dt & (19) \\ &= \mu_0 [1 + (B_s/\mu_0) \partial n/\partial H] dH/dt \\ &\quad + (\partial n/\partial x) B_s dx/dt & (20) \end{aligned}$$

となる。ここで、(20)式の右辺第2項は短冊状磁区の物理的運動に起因する単位面積当たりの速度誘起電圧である。他方、(20)式の右辺で dH/dt に比例する第1項は変圧器誘起電圧に対応する。さて、(20)式で磁区の運動速度が極めて遅く $dx/dt \approx 0$ が成り立つとすれば、(20)式は

$$dB/dt = \mu_0 [1 + (B_s/\mu_0) \partial n/\partial H] dH/dt = \mu_r dH/dt \quad (21)$$

となる。したがって、可逆透磁率 μ_r は外部磁界 H に対する磁区の変化率 $\partial n/\partial H$ を表すパラメータとなる。この可逆透磁率 μ_r を使って、(20)式を書き直すと

$$dB/dt = \mu_r (dH/dt) + (\partial n/\partial x) B_s dx/dt \quad (22)$$

となる。外部磁界 H と(22)式右辺第2項の速度誘起電圧の比を考えると

$$\begin{aligned} s &= [(\partial n/\partial x) B_s dx/dt] / H \\ &= [(dB/dt) - \mu_r (dH/dt)] / H & (23) \end{aligned}$$

となり、(4)式のChua型モデルで $B=0$ として得られるヒステリシス係数 s に一致する。したがって、(4)式のヒステリシス係数 s は磁壁の運動速度 dx/dt に比例するパラメータであることがわかる。櫛らも(23)式で与えられるパラメータ s と対応するパラメータを定義し、そのパラメータが磁壁数 n に比例し、また磁壁間の渦電流損失を評価するパラメータとなることを報告している^{3), 10)~12)}。

最後に、(4)式と(22)式から磁界 H と磁束密度の時間微分 dB/dt の積を考えると

$$\begin{aligned} H \cdot (dB/dt) &= (1/\mu) B (dB/dt) \\ &\quad + (\partial n/\partial x) B_s (\mu_r/s) (dH/dt) (dx/dt) \\ &\quad + (1/s) [(\partial n/\partial x) B_s (dx/dt)]^2 & (24) \end{aligned}$$

となる。右辺第1項は、平均値が零となる無効電力すなわち磁気蓄積エネルギーに対応し、第2項は(12)式の関係を用いて

$$\begin{aligned} (\partial n/\partial x) B_s (\mu_r/s) (dH/dt) (dx/dt) \\ = (\partial n/\partial x) B_s (\mu_r/\phi) (dx/dt) & (25) \end{aligned}$$

と変形でき、磁区の運動速度 dx/dt は周波数に比例す

るから、結局(25)式も周波数に比例する。よって、(24)式右辺第2項はヒステリシス損を表す項となる。さらに、(24)式の第3項は磁壁の運動速度 dx/dt が周波数に比例することから、周波数の二乗に比例する渦電流損を表している。

2.5 応用例

(4)式のChua型モデルで、 μ, μ_r さらに s の非線形性を考慮して得られる磁気余効、スイッチング、マイナーループ特性などは、文献[1], 4), 13), 14)]を参照していただくとして、本稿では μ, μ_r, s を一定値とする線形モデルの例から得られる有用な結果を示す。(4)式で、時間微分 $d/dt = j\omega$ として得られる単位体積当たりの鉄損 P_i は

$$P_i = (1/2) [\mu(\mu - \mu_r) / (s^2 + \omega^2 \mu^2)] s \omega^2 H_m^2 \quad (26)$$

で与えられる。ここで、 ω と H_m はそれぞれ角周波数と磁界の最大値である。低磁化領域では、(12)式より $s = \phi \omega H_m$ となり、この式の ϕH_m は(16)式で $H_p = H_n = H_m$ 、 $B = B_m$ として得られる $(B_m/H_m) = \mu_r + \phi H_m$ から $\phi H_m = (B_m/H_m) - \mu_r = \mu - \mu_r$ と表されるから、(26)式は

$$P_i = [\mu(\mu - \mu_r) \phi \pi f H_m^2] / [(\mu - \mu_r)^2 + \mu^2] = (\pi/2) f \phi H_m^2 \quad (27)$$

となる。ここで、 f は周波数($\omega = 2\pi f$)であり、 $\mu \gg \mu_r$ と仮定している。(27)式の結果は、Rayleighループより得られる鉄損より若干大きめの値を与える⁹⁾。次に、高磁化領域では、ヒステリシス係数 s が近似的に $s = \omega(B_m - \mu_r H_m)/H_c = \omega B_m/H_c$ (H_c は保磁力)で与えられるから、(26)式は、 $\mu \gg \mu_r, \mu H_m = B_m$ とすれば

$$\begin{aligned} P_i &= (1/2) \mu \omega B_m H_c H_m^2 (\mu - \mu_r) / [B_m^2 \\ &\quad + (\mu H_c)^2] = \pi f B_m H_c & (28) \end{aligned}$$

となり、鉄損が長軸を B_m 、短軸を H_c とする楕円の面積で近似されることとなる。最後に、Maxwellの方程式 $\nabla \times E = -\partial B/\partial t$ 、 $\nabla \times H = J$ および一般化されたオームの法則 $J = \kappa E$ に、(4)式を導入して得られる

$$\begin{aligned} \nabla^2 B + (\mu/s) \nabla^2 (\partial B/\partial t) &= \kappa \mu (\partial B/\partial t) \\ &\quad + (\kappa \mu \mu_r/s) (\partial^2 B/\partial t^2) & (29) \end{aligned}$$

を、 $x=0$ で $H_0 \cos \omega t$ 、 $x=\infty$ で $H=0$ の境界条件を持つ次元問題で解き、表皮効果を調べる²⁾。ここで、 E, J, κ はそれぞれ電界、電流密度ベクトルおよび導電率である。(29)式を上述の境界条件で解いて得られるSkin depth s_d は、磁気履歴が無視された場合、 $s \rightarrow \infty$ として、 $s_d = \sqrt{2/\omega \kappa \mu}$ となり、従来のSkin depthと一致する。他方、磁気履歴が系を支配的である場合、 $s \rightarrow 0$ として、 $s_d = \sqrt{2/\omega \kappa \mu_r}$ となり、 $\mu > \mu_r$ とすれば、磁気履歴現象はSkin depthを深くすることがわかる。

3. ま と め

本稿では、磁化特性を表す代表的モデルを紹介し、それらの間に密接な関係があることを示し、磁化特性モデルの物理的背景を簡単な短冊状磁区モデルを用いて明らかにした。また、線形モデルから得られる有用ないくつかの結果を示した。最後に、筆者らの提唱する Chua 型モデルについて、千葉大学の榎教授や佐藤氏（現在・東芝）並びに電気学会非線形磁気装置解析手法調査専門委員会の委員諸氏から多くの議論をいただき、紙面をお借りして厚くお礼を申し上げます。

文 献

- 1) Y. Saito, S. Hayano, Y. Kishino, K. Fukushima, H. Nakamura and N. Tsuya: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-22**, No. 5 (1986).
- 2) Y. Saito, K. Fukushima, S. Hayano and N. Tsuya: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-23**, No. 5 (1987).
- 3) Y. Saito, S. Hayano and Y. Sakaki: *J. Appl. Phys.* **64**(10), 15 (1988).
- 4) Y. Saito, M. Namiki and S. Hayano: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-25**, No. 4 (1989).
- 5) L. O. Chua and K. A. Stromsmoe: *IEEE Trans. Circuit Theory*, **CT-17**, No.4 (1970).
- 6) M. L. Hodgdon: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-24** No. 1 (1988).
- 7) F. Preisach: *Zeitschrift für physik*, **94**, No. 5 (1935).
- 8) Y. Saito, S. Hayano, H. Nakamura, Y. Kishino and N. Tsuya: *JMMM* **54-57** (1986).

- 9) S. Chikazumi and S. H. Charap: *Physics of Magnetism* (John Wiley & Sons, INC., 1964).
- 10) Y. Sakaki: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-16**, NO. 4 (1980).
- 11) Y. Sakaki and S. Imagi: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-17**, No. 4 (1981).
- 12) Y. Sakaki and S. Imagi: *IEEE Trans. Magn.*, **MAG-18**, No. 6 (1982).
- 13) 並木 勝, 早野誠治, 齋藤兆古: 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-88-174 (1988).
- 14) 並木 勝, 大原忠年, 早野誠治, 齋藤兆古: 電気学会マグネティックス研究会資料, MAG-89-65 (1989).



齋藤兆古 さいとうよしふる
昭 21 生. 昭 50 法政大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了, 同年同大学電気工学科助手, 昭 51 同講師, 昭 53 同助教授, 昭 62 同教授, 現在に至る. 専門 計算電磁力学 (工博)



早野誠治 はやのせいじ
昭 22 生. 昭 52 法政大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了, 昭 41 法政大学工学部電気工学技術職員, 昭 52 同助手, 現在に至る. 専門 計算電磁力学

論説 ● 夢をみながら

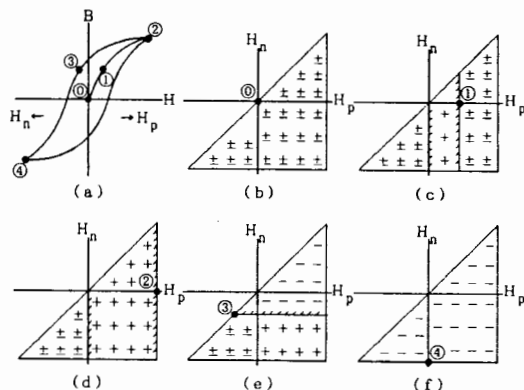
展望 ● 磁気と計算機シミュレーション



Preisach 型モデル

Preisach-type Model

ある磁性体が単位磁化を持つ単位磁区から構成されているとする。このモデルを使って (a) 図の点①, ②, ③および④の磁化状態を表すことを考える。(a) 図で磁界 H の正方向を H_p , 負方向を H_n , (b)-(f) 図で+と-をそれぞれ H_p , H_n 方向の単位磁化とし、さらに、縦軸を H_n , 横軸を H_p とする線図を考える。この線図で、(a) 図の①点は非磁化状態であるから、+磁化と-磁化の数が等しく全体として磁化が零となる (b) 図に対応する。さらに①と②の点は、正方向に磁化された状態であるから、横軸 (H_p) 方向に磁化が+に変化した (c) と (d) 図にそれぞれ対応する。また負方向に磁化された③と④点は、それぞれ縦軸 (H_n) 方向に磁化が-に反転した (e), (f) 図に対応する。このように磁化曲線上の各点は縦軸を H_n , 横軸を H_p とする線図上の磁化分布によって表現できる。この線図が Preisach 線図である。Preisach 線図全体の磁化が磁束密度 B を表すから、磁化の分布に比例



Preisach Diagram

(a) 図中の点①~④は (b)~(f) の各状態に対応する。

する関数が 1 でなく Ψ であるとすれば、

$$B = \iint \Psi dH_p dH_n, \quad (1)$$

が成り立つ。したがって、(1) 式から分布関数 Ψ は

$$\Psi = \partial^2 B / \partial H_p \partial H_n, \quad (2)$$

で与えられる。この分布関数 Ψ が Preisach の分布関数であり、実測のヒステリシスループ群から (2) 式を用いて Ψ を求めることができる。実験的に求めた Ψ を使って (1) 式の積分を実行することで、磁束密度 B を得る。

このように、磁化の反転に基づいて磁化特性を表すモデルが Preisach 型モデルである。(法政大 斎藤兆古)