

Wavelet 変換を用いたブラックボックスの インピーダンス—周波数特性の推定

An Estimation of Impedance vs. Frequency Characteristics of Black Box Circuit by Wavelet Transformation

緑川 洋一、早野 誠治、斎藤 兆古
Y. Midorikawa, S. Hayano and Y. Saito

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

To analyze the frequency characteristics of the complex systems, e.g. human body and complex electronic circuits, it is essential to represent the exact frequency characteristics for each element comprising a complex system.

In the present paper, we propose a new modeling methodology based on the combination of conventional least squares with wavelet transformation. As a result, we have succeeded in realizing the frequency characteristics of the each element as well as the entire system with higher accuracy.

キーワード：複雑系、周波数特性、最小2乗法、ウェーブレット変換

Key words: complex system, frequency characteristics, least squares, wavelet transformation

1. まえがき

工学的に単純な系はシステムを構成する素子の値を解析的に求めることができ、素子の結合が既知であれば、系の特性も計算可能である。しかし、系の入出力特性を実験的に測定できても、解析的モデリングの糸口が皆無である系も多い。たとえば生体系などがその典型的な例である。近年、半導体素子の普及から、多くの電気機器は広範な周波数範囲で動作せざるを得ない状況へ至っている。^{(1)~(4)}

さて、典型的な電気機器を構成する素子であるインダクタを例として考える。インダクタは、低周波でほぼ所定のインダクタンスの値を持つ。しかし、高周波になると共振現象等を呈し、事実上、インダクタとして機能しない^{(1)~(2)}。これは、低周波では従来の集中定数的なモデルを適用できるが、高周波では分布定数的なモデルを想定せざるを得ないことを意味する。低周波を前提として設計された素子の多くは、分布定数的に考えた場合、殆ど解析的手法が適用できない複雑な系となる。これは、典型的な分布定数素子であるアンテナの構造上の単純さを考えれば想像がつくであろう。電気機器を構成する最も構造的に単純な素子であるインダクタですら、分布定数的に考えると極めて解析が困難である。まして、系全体の分布定数的な解析など不可能な複雑系であり、生体系と同じくどのようにモデル化するかは極めて困難な問題である。

しかし、このような複雑系であつても、実験的に入力に対する応答は測定できる。そこで、

測定結果から複雑系の解析的モデルを作成し、これを解析へ用いる方法が考えられる。生体系で考えれば、実験で得られた局所的部位の周波数特性を何らかの解析的な関数で表現し、個々の部位の周波数特性を表す関数を組み合わせて生体全体の周波数特性が解析できる。

本稿は、複雑系で実験的に得られる特性から関数モデルを系統的に導く方法として、最小2乗法とウェーブレット(Wavelet)変換の結合に基づく方法を提唱するものである^{(9)~(11)}。

系の任意パラメータに対する特性が実験的に得られた場合、常套的に用いられる手段として最小2乗法がある。最小2乗法による関数モデルの係数は、実験値と関数モデル間の2乗誤差が最小になる条件で決定される。これは平均的には極めて好ましいことであるが、逆に、系の持つ本質的にピーキーな特性を平滑化する欠点ともなる。本稿では、この欠点を克服する方法として、ウェーブレット変換を応用する。その結果、滑らかな特性のみならずピーキーな特性も表現し得る関数モデルの導出が可能であることを報告する。

2. 基礎理論

2. 1. 離散値系ウェーブレット変換

まず始めに、離散値系ウェーブレット変換について、本稿で用いるハール(Haar)基底のアナライジングウェーブレットについて述べる^{(6)~(10)}。

簡単化のため、8次のデータベクトル X

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T, \quad (1)$$

について考える。まず始めの変換は、

$$X' = CX, \quad (2)$$

であり、 C 行列は、

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_1 & -C_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_0 & C_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & -C_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_1 & -C_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

である。ここで、 C_0, C_1 は、

$$C_0 = C_1 = 1/\sqrt{2}. \quad (4)$$

で与えられる。

この変換により、

$$X' = C_0 X = [s_1 \ d_1 \ s_2 \ d_2 \ s_3 \ d_3 \ s_4 \ d_4]^T. \quad (5)$$

となり、奇数行(s_1, s_2, s_3, s_4)は、重み付きの積分演算に相当し、偶数行(d_1, d_2, d_3, d_4)は、重み付きの微分演算に相当する。

この順番を並びかえるため、 P_8 行列

$$P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

を用い変換する。つまり、

$$P_8 X' = P_8 C_4 X = W_8^{(1)} X = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4] \quad (7)$$

となる。次には、式(7)の s_1, s_2, s_3, s_4 に対して、同様の変換を行う。

$$W_8^{(2)} X = [S_1 \ S_2 \ D_1 \ D_2 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4] \quad (8)$$

さらに、式(8)の S_1, S_2 に対して、同様の変換を行うと、

$$s = W_8^{(3)} X = [S \ D_1 \ D_2 \ d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4] \quad (9)$$

となる。ここで、 $W_8^{(2)}$ と $W_8^{(3)}$ は、

$$W_8^{(2)} = (P'_8 C'_8)(P_8 C_8), \quad W_8^{(3)} = (P''_8 C''_8)(P'_8 C'_8)(P_8 C_8), \quad (10)$$

$$P_8 = \begin{bmatrix} P_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix}, \quad C_8 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 \\ 0 & I_4 \end{bmatrix}, \quad P'_8 = \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_6 \end{bmatrix}, \quad C'_8 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & I_6 \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。また、 I_n は、 n 次の単位行列とする。

(9)式のようになるまで、データ数 2^n 個の場合 $m = \text{Log}[n]/\text{Log}[2]$ 回変換を行う。

また、逆変換は、

$$X = W_8^T S \quad (12)$$

である。

さらに、二次元の離散値系ウェーブレット変換は、

$$M' = W_n M W_m^T, \quad (13)$$

で与えられる。 M' は、ウェーブレットスペクトラム、 M は、元の二次元行列、 W_n および、 W_m は、 n 次および m 次のウェーブレット変換行列である。

二次元のウェーブレット逆変換は、

$$M = W_m^T M' W_n, \quad (14)$$

である。

2. 2. 近似関数

通常、ある実験値が得られたとき、これをパラメータ x のべき級数で近似しようとする、

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots \quad (15)$$

であるから、 n 個の測定点に対して、

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 + \dots \\
 f(x_2) &= a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 + \dots \\
 f(x_3) &= a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3 + \dots \\
 &\dots \\
 f(x_n) &= a + bx_n + cx_n^2 + dx_n^3 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

となり、係数 a、b、c、d、.....を決めるには、

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ \dots \end{bmatrix}
 \tag{17}$$

を解くことになる。いわゆるラグランジェ(Lagrange)型近似であり、よく遭遇するシステムである。

本稿では、このラグランジェ型近似を関数として採用する。これは、多くの関数が、パラメータ x に関してテイラー(Taylor)展開可能であり、係数はテイラー展開の係数としての物理的意味を持つことによる。テイラー展開は充分小さいパラメータ x を前提とするから、パラメータ x の最大値を x_M とすれば、(17)式を、

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{x_1}{x_M}\right) & \left(\frac{x_1}{x_M}\right)^2 & \left(\frac{x_1}{x_M}\right)^3 & \dots \\ 1 & \left(\frac{x_2}{x_M}\right) & \left(\frac{x_2}{x_M}\right)^2 & \left(\frac{x_2}{x_M}\right)^3 & \dots \\ 1 & \left(\frac{x_3}{x_M}\right) & \left(\frac{x_3}{x_M}\right)^2 & \left(\frac{x_3}{x_M}\right)^3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \left(\frac{x_n}{x_M}\right) & \left(\frac{x_n}{x_M}\right)^2 & \left(\frac{x_n}{x_M}\right)^3 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ \dots \end{bmatrix}
 \tag{18}$$

と変形して適用する。

2. 3. Wavelet-最小 2 乗法

次に、(18)式のようなシステム方程式の解法を考える。まず、任意の線形システム

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}
 \tag{19}$$

を考える。 \mathbf{X} 、 \mathbf{Y} 、 \mathbf{C} は、それぞれ m 次の解ベクトル、 n の入力ベクトル、さらに n 行 m 列のシステム行列である。(17)式のようなシステム行列の場合は一般に、 n が m より大きく直接逆行列を求めることはできない。そこで、近似逆行列を求めることを考える。

まず、(19)式の両辺にシステム行列 \mathbf{C} の転置行列 \mathbf{C}^T を左から掛け算する。

$$\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \quad \text{or} \quad \mathbf{K} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{X}
 \tag{20}$$

ここで、 \mathbf{K} 、 \mathbf{S} はそれぞれ、 m 次の入力ベクトルと m 行 m 列の正方で対称なシステム行列である。未知数の数 m が式の数 n よりも少ない場合、(20)式は解くことができ、

$$\mathbf{X}_{\text{appo}} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{K} = [\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C}]^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Y}
 \tag{21}$$

によって解ベクトル \mathbf{X}_{appo} が得られる。これが最小 2 乗法による解である。

次に、最小 2 乗法は、近似解 \mathbf{X}_{appo} と実験値 \mathbf{Y} 間の 2 乗誤差を最小にすることを示しておく。2 乗誤差は、

$$\begin{aligned} e^2 &= [\mathbf{Y} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{\text{appo}}]^T \cdot [\mathbf{Y} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{\text{appo}}] \\ &= \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{X}_{\text{appo}}^T \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{\text{appo}} + \mathbf{X}_{\text{appo}}^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{\text{appo}} \end{aligned} \quad (22)$$

であるから、最小値は、

$$\frac{\partial e^2}{\partial \mathbf{X}_{\text{appo}}} = -2[\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_{\text{appo}}] = 0 \quad (23)$$

となる。

(23)式右辺の括弧内は(20)式と一致する。従って、(20)式の解は 2 乗誤差を最小化する。最小 2 乗法による解は理論上存在するが、係数行列 \mathbf{C} の要素によっては簡単に解けない場合もある。

本稿では、このような不適切なシステム行列 \mathbf{S} に対してウェーブレット変換を適用して、近似的に解くことを目的としている。

(20)式をウェーブレット変換したシステムを、

$$\mathbf{K}' = \mathbf{S}' \cdot \mathbf{X}' \quad (24)$$

とする。

(24)式は(20)式を単純に線形変換したものであるから、依然として解けない。このため、(24)式のシステム行列 \mathbf{S}' の特定部分行列 s' から \mathbf{S}' の近似逆行列を計算することを考える。

いま、 s' を \mathbf{S}' のマザーウェーブレットを含む(1,1)から(n',n')要素までの正方部分行列とする。これは、ウェーブレット変換されたシステム行列 \mathbf{S}' が、もとの行列 \mathbf{S} の支配的要素をマザーウェーブレット近傍に集約しているためである。かくして、 \mathbf{S}' の近似逆行列 $\mathbf{S}'_{\text{appo}}{}^{-1}$ は、

$$\mathbf{S}'_{\text{appo}}{}^{-1} = \mathbf{Z} \oplus (s')^{-1} \quad (25)$$

で与えられる。 \mathbf{Z} は \mathbf{S}' と同じ大きさのゼロ行列であり、丸で囲んだ+記号は \mathbf{Z} の(1,1)から(n',n')要素までの正方部分へ s'^{-1} が足し算されることを意味する。

s' が非特異行列であれば、(25)式の近似逆行列 $\mathbf{S}'_{\text{appo}}{}^{-1}$ をウェーブレット逆変換し、(20)式の近似解ベクトル \mathbf{X}_{appo} が、

$$\mathbf{X}_{\text{appo}} = \mathbf{S}'_{\text{appo}}{}^{-1} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{S}'_{\text{appo}}{}^{-1} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Y} \quad (26)$$

で与えられる。 $\mathbf{S}'_{\text{appo}}{}^{-1}$ は $\mathbf{S}'_{\text{appo}}{}^{-1}$ をウェーブレット逆変換した近似逆行列である。

このような方法により、(18)式の係数行列を決め、測定された特性から(15)式のような関数モデルとして系統的に導く。

3. インピーダンス-周波数特性

3. 1. 共振コイル

筆者等は以前から導体間の分布容量を利用し共振回路を形成する研究を行ってきた^{(12)~(15)}。このような分布定数型の回路素子は解析的に特性を求めることは非常に困難である。また、このような導体間の分布容量等はどんな素子にも存在し、特に高周波領域において問題になる。そこで、ここではフィルム型の共振コイルのインピーダンス-周波数特性を取り上げる。

図1(a)に、65 μ m厚のポリイミド基盤上に厚さ17 μ mの銅箔を化学エッチングで2本の導体が平行で同心円状になるように作成し、さらに2本の導体の長さを等しくするため、裏表の2層で構成されているフィルム型の共振コイルを示す。また、図1(b)に結線図を示す。図2に、この共振コイルのインピーダンス-周波数特性を示す。ただし、測定点数はウェーブレット変換を用いるため $2^6=64$ 点とした。

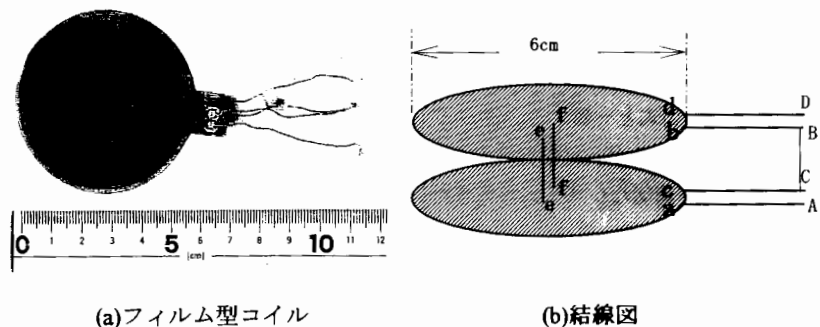


図1. フィルム型共振コイル

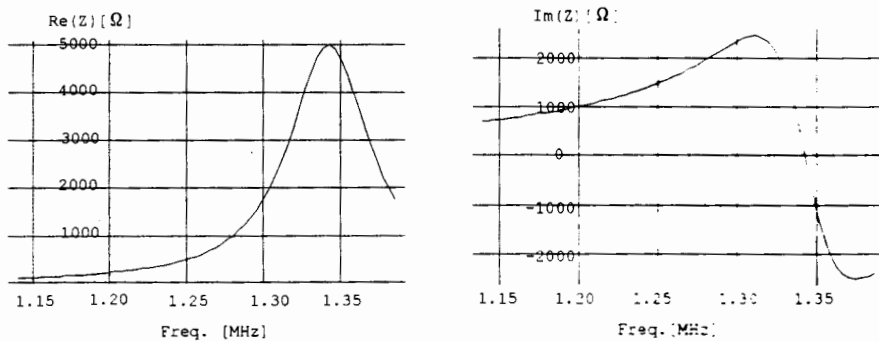


図2. フィルム型共振コイルのインピーダンスZ

このインピーダンス Z の近似関数を、 $m=32$ 項までとり、64行32列のシステム行列 C を導く。このシステム行列は、長方形であり、逆行列 C^{-1} を直接求めることはできないので、システム行列 C の左から転置行列 C^T をかけ正方形行列 S をつくる。このシステム行列 S を図3示す。しかし、このシステム行列 S は、特異行列となり直接逆行列が計算できない。このためシステム行列 S をウェーブレット変換し、マザーウェーブレット (ウェーブレット変換したシステム行列の(1,1)の部分) を含む10行10列の正方形行列 s' を切り出し、この部分の逆行列をとる。(25)式により近似逆行列 S'_{appo}^{-1} を求め、これをウェーブレット逆変換し、近似解ベクトル X_{appo}

を求める。図4に X_{appo} を示す。この近似解ベクトル X_{appo} を原システム行列 C へ掛け、近似入力ベクトル Y_{appo} を求めた結果を図5に示す。

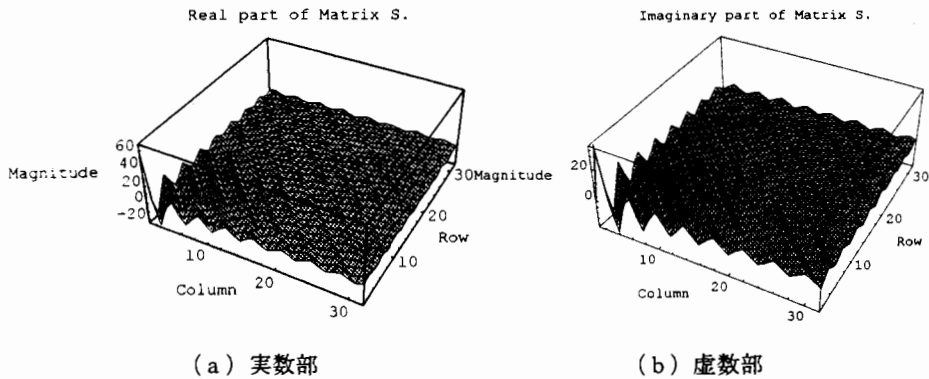


図3. システム行列S

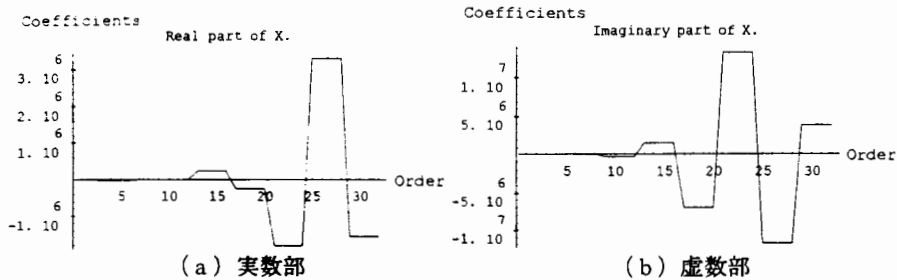


図4. 近似解ベクトル X_{appo}

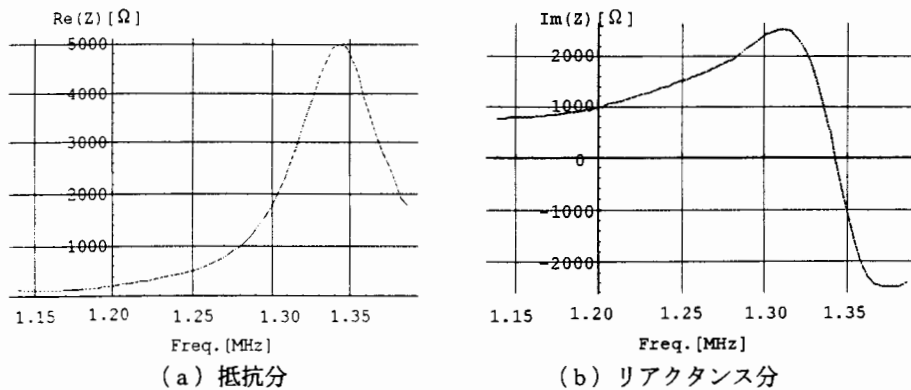


図5. 近似入力ベクトル Y_{appo} (Wavelet-最小二乗法)

次に、比較のため従来型最小二乗法によるラグランジェ型補間を行う。 Z の近似関数を、 $m=10$ 項までとり、64行10列のシステム行列 C を導く。従来型最小二乗法により、近似入力ベクトル Y_{appo} を求めた結果を図6に示す。図5と図6を比較すると図5のウェーブレット変換を用い

た場合の方が明らかに高精度である。これは、ウェーブレット変換を用いた場合、逆行列は10行10列の部分行列から求めているが、インピーダンスの近似関数が、32項まで考慮されていることによる。他方、従来型最小2乗法は、逆行列をウェーブレット変換を用いた場合と同様に、10行10列の正方行列で求めているが、インピーダンスの近似関数は、10項までである。このためウェーブレット変換を用いた結果はピーキーな特性も表現し得る。以上の結果から、ウェーブレット変換によってラグランジェ型の補間が高精度で可能となることがわかる。

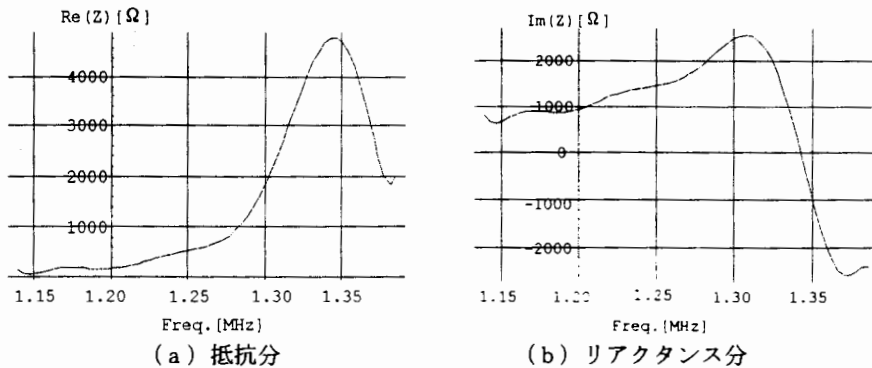


図6. 近似入力ベクトル Y_{appo} (従来型最小2乗法)

3. 2. 近似関数の回路計算への応用

図1のフィルム型共振コイルに $C=100[pF]$ のコンデンサを並列に接続し、インピーダンス-周波数特性を測定した結果を図7に示す。この結果から周波数特性が変化し、共振周波数が1.34MHzから1.23MHzへ移動していることがわかる。

次に、最小2乗法とウェーブレット変換の結合に基づく方法により求めたインピーダンス-周波数特性の近似関数モデルを用いて、 $C=100[pF]$ のコンデンサを並列に接続した場合のインピーダンス-周波数特性を計算した結果を図8に示す。図7と図8を比較すると測定値と同様の特性が、近似関数モデルを用いて求めた計算結果からも得られていることがわかる。以上の結果から、近似関数モデルを組み合わせて複雑系の周波数特性の解析が可能であることがわかる。

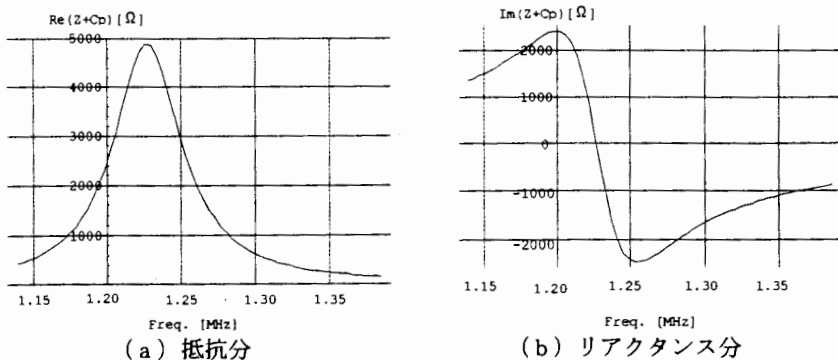


図7. フィルム型共振コイルに $C=100[pF]$ を並列接続した場合のインピーダンス Z (測定値)

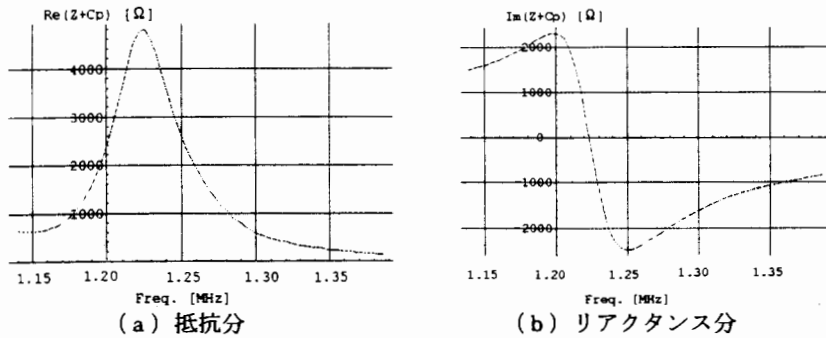


図8. フィルム型共振コイルに $C=100[\text{pF}]$ を並列接続した場合のインピーダンス Z (計算値)

4. まとめ

本論文では、系の入出力特性を実験的に測定できても、解析的モデリングの糸口が皆無である系、たとえば生体系や、分布定数的に考えなければならないような極めて解析が困難である系などの複雑系に対して、実験的に得られた特性から関数モデルを系統的に導く方法として、最小2乗法とウェーブレット変換の結合に基づく方法を提唱した。具体的な例として、分布定数型の回路素子であるフィルム型共振コイルのインピーダンス—周波数特性についてこの方法を適用した。その結果、解析的に特性を求めることが困難な系に対して有効であることが判明した。また、従来型最小2乗法に対してウェーブレット変換を用いた方法は、ピーキーな特性を高精度に表現できることを示した。

参考文献

- [1] S.Hayano, Y.Nakajima, H.Saotome, and Y.Saito, "A new type high frequency transformer," *IEEE Trans., Magn.*, Vol. 27, No.6, pp. 5205-5207, (1991)
- [2] S.Hayano, Y.Midorikawa, and Y.Saito, "Development of film transformer," *IEEE Trans., Magn.*, Vol.30, No.6, pp.4758-4760, (1994)
- [3] T.Sato, H.Tomita, A.Sawabe, T.Inoue, T.Mizoguchi, and M.Sahashi, "A magnetic thin film inductor and its application to a MHz switching dc-dc converter," *IEEE Trans., Magn.*, Vol.30, No.2, pp. 217-223, (1994)
- [4] K.Yamasawa, K.Maruyama, I.Hirohama, and P.P.Biringer, "High-frequency operation of a planar type microtransformer and its application to multilayered switching regulators," *IEEE Trans. Magn.*, Vol.26, pp.1204-1209, (1990)
- [5] 山田昌哉 監訳、井上 昭 訳、G.ストラング 著、"線形代数とその応用" (産業図書)。
- [6] 斎藤、吉田、緑川、増田、遠矢 "ウェーブレットと相関解析によるラインノイズ源探査"、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-95-30、1995年3月6日。
- [7] 斎藤、"Wavelet変換による逆問題解析"、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-96-37、1996年2月29日。

- [8]D.E.NEWLAND “Random vibrations, spectral and wavelet analysis” ,Third Edition, Longman Scientific & Technical, (1993)
- [9]山田 “ウェーブレット解析とその応用”、電子情報通信学会誌、Vol.76, No.5, pp.515-528, (1993)
- [10]山口、山田 “ウェーブレット解析”、科学、Vol.60, No.6, pp.398-405, (1990)
- [11]斎藤、“電磁界系逆問題解析技術の進歩”、電気学会論文誌A、114巻6号、pp.432-438、(1994)
- [12]Y.Midorikawa, S.Hayano and Y.Saito, " A new inductor having a noise filtering capability, " IEEE *Trans.Magn.*, Vol.30, No.6, pp.4761-4763, Nov. 1994.
- [13]Y.Midorikawa,S.Hayano, and Y.Saito, "A resonant phenomenon between adjacent series connected coils and its application to a noise filter" Elsevier Studies in Applied Electromagnetics in Materials, pp.633-636 (1995).
- [14]緑川、早野、斎藤、“導体間の分布容量を用いた共振回路の実験的検討”、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-94-10、1994年3月7日。
- [15]緑川、早野、斎藤、“薄型トランス・インダクタの検討”、電気学会マグネティックス研究会資料、MAG-94-135、1994年10月21日。

原稿受付日	平成8年9月24日
-------	-----------