

—1998年11月26日, 27日—

# 不適切な線形システムと逆問題

斎藤 兆古<sup>1)</sup><sup>1)</sup>法政大学工学部電気電子工学科

## ILL POSED LINEAR SYSTEMS AND INVERSE PROBLEMS

Yoshifuru SAITO<sup>1)</sup><sup>1)</sup>Department of Electronics and Electrical Engineering, Hosei University

In the present paper, at first it is described that the inverse problems appeared in the engineering problems are classified into the inverse source, inverse rule and inverse parameter problems. Also, it is revealed that all of the system equations concerning with the inverse problems are reduced into solving for the ill posed linear systems. Finally, this paper shows that the solution strategy for the ill posed linear systems is classified two major categories: one yields an exact solution and the other produces an approximate solution. The former gives an exact solution satisfying the given system of equation but has an enlarging nature of the noise included in the measured fields. The latter gives only an approximate solution of the given system but has an averaging nature of the field noise.

### 1.はじめに

以前から逆問題に関して纏めようと試みてきたが、逆問題は簡単に解ける問題でないし、逆問題の定義すら研究者の専門や観点によって統一的な見解がなされていないため挫折して来た。今回は何としても纏めておきたい。この理由は、良い結果が得られない逆問題に遭遇する都度纏めるのを断念していたのでは何時までたっても先へ進めず、研究成果が積み重ねられないためである。

本稿では、最初に逆問題の定義を明確にしておく。本稿で取り扱う逆問題は式の数よりも未知数の数が多い線形システムである。この種の線形システムは一般に式を満足する解は無数に存在し、解が一意的に求まらないため、いわゆる不適切問題 (ill-posed-problem) と呼ばれる。本稿の目的は、無数に存在する解の中から物理的に存在する解を探す方法である。しかし、必ずしも物理的に存在する解が求まらない場合もある。このような

場合、物理的に存在する解に最も近い近似解を得る方法を考える。従って、本稿は逆問題で遭遇する不適切な線形システムの解析法を纏めたものと考えても良い。

逆問題とは「結果から原因を探す問題」と考えても良いだろう。結果の全てが判れば原因は一意的に決まるであろう。このような意味で逆問題は決して解けない問題でない。しかし、現実の工学的に重要な意味を持つ逆問題は、多くの場合、局所的な結果から原因を一意的に求める問題である。例えば、心臓の周辺磁界を測定し、磁界源となる心臓内の電流を求める問題など、心臓内の磁界が測定できれば簡単に電流の存在する位置や大きさを計算できる。実際は、心臓内の磁界を直接測定することは不可能である。このため、現在の心臓手術ではカテーテルを通じて直接心臓内の電圧を測定しながら行われる。電子機器が周辺へ放射する電磁界源を求めることで放射電磁界を低減する EMC (electromagnetic compati-

<sup>1)</sup> 電気電子工学科教授, 〒184-8584 小金井市梶野町 3-7-2, TEL& FAX)042-387-6200

lity) 工学や放射線強度を測定することで漏洩放射線源を探索する放射線センシング工学などは、すべていわゆる不適切な線形システムを解くことに他ならない。

## 2. 逆問題と不適切な線形システム

自然科学は、自然界で起こる様々な現象を単純な個々の現象に分解し観察することで特定の事物間の規則性を見だし、見いだされた規則性の中で普遍的に成り立つ規則を抽出しその因果関係を明らかにして法則を導くことが大きな役割である。また、特定の事物間で成り立つ法則を組み合わせてより複雑な現象全体の因果関係を明らかにすることも自然科学の役割である。

単純な法則の一例として、電流が流れている直線状の導線を磁界が円周状に取り囲む現象を考える。いわゆるアンペア (Ampere) の法則である。さて、導線が直線ではなく複雑なループや変曲点を有する形状であるとき、導線中の電流と導線の周辺磁界間の関係はどのような形で表されるであろうか？通常、このような問題は、まず最初に導線の形状とそれを流れる電流が既知情報であるとして、導線の周辺磁界分布を電流の関数として求めることに帰する。では逆に、導線の周辺磁界分布を既知情報として、電流を磁界の関数として求める解析がなされなかったのであろうか？答えは簡単である。電流は導線から漏れること無く容易に測定や制御が可能であるのに対して、導線の周辺磁界は無限遠点にまで広がり容易に全ての磁界分布が測定出来ないことに起因する。この例から明らかのように、多くの自然科学の方法論は測定と制御が容易な変数を既知情報とし、測定と制御が困難な変数を未知情報として求める形式で展開される。このような考え方で定式化される問題を順問題 (regular or forward problem) と呼ぶ。言い換えれば、情報源と情報伝達法則を前提として局所的情報を求める問題が順問題である。この順問題解析は、情報源と情報伝達に関する法則が既知であるから結果が一意的に決まり、既に完成した機器や装置等の特性を解析する極めて有効な手段として活用される。しかし、局所的情報を前提とする機器や装置の設計に適用するには多くの試行錯誤的な反復が必要となり、極めて非能率的手段となる。

### 順問題

情報源 + 情報伝達の法則 → 局所的情報

もし、前述の例で仮に磁界が容易に測定・制御可能であればおそらく電流が磁界の関数として表現されることとなったであろう。しかし、実際は空間中に分布する全磁界を測定することが不可能であるため、局所的な磁界分布から一意的な電流やコイル形状を求めることは困難であろう。このように局所的情報から情報源を求める問題を源推定に関する逆問題 (Inverse source problem、以下 IS 問題と略記) と呼ぶこととしよう [1]。

### 源推定に関する逆問題

局所的情報 + 情報伝達の法則 → 情報源

この源推定に関する逆問題解析は、電磁石や電動機等の電気機器内で所望の磁界分布からどのように電流を通電するコイルや磁路を構成すればよいかを決める設計問題に対しては極めて有効であろう。また、周辺へ放射電磁界を最小にする PCB (printed circuit board) 基板の回路設計にも有効であろう。問題は情報が局所的であるため、解が一意的に決まらない点にある。

他方、情報源と局所的情報が与えられ、情報伝達の法則を探索する問題が考えられる。この情報源と局所的情報間を司る法則、すなわち、情報源と局所的情報間の因果関係を探索する逆問題を規則推定に関する逆問題 (inverse rule problem、以下、IR 問題と略記) と呼ぶ。

### 規則推定に関する逆問題

情報源 + 局所的情報 → 情報伝達の規則

例えば、ある電流素片が周辺へ与える磁界間の因果関係を探索する問題などが典型的な電流と磁界間の規則推定に関する逆問題であり、ピオサ・パールの法則は試行錯誤の結果導かれたこの IR 問題に対する解である。すなわち、規則推定に関する逆問題は経験的・実験的結果から導かれる法則を系統的に求める逆問題である。

しかしながら、多くの自然科学の法則は、単に情報源と局所的情報間の幾何学的定数 (例えば距離など) のみならず空間を占める媒質の性質に依存する。たとえば、真空中で、電流素片が与える任意の点における磁界はピオサ・パールの法則によって求められる。しかし、電流素片と磁界間に磁性体が存在する場合、単純にピオサ・パールの法則から磁界は求められない。したがって、電流素片と磁界間が真空中で占められる場合と磁性体で占められる場合の比較から磁性体の性質を探索する逆問題が考えられる。このように情報源、局所的情報さらに情報伝達の基本法則が与えられ、情報伝達経路を構成する媒質を探索する問題

を媒質推定に関する逆問題 (inverse-parameter-problem, 以下 IP 問題と略記) と呼ぼう [2]。

**媒質推定に関する逆問題**  
 情報源 + 局所的情報 + 情報伝達の基本法則  
 → 媒質

媒質推定に関する逆問題は、磁性体の磁化特性、誘電体の誘電率さらに電気導電率などを測定する計測技術に他ならない。

本稿は、従来の解析技術が測定や制御が容易な物理量を既知情報とし、測定が困難な物理量を未知情報として求める問題、すなわち 順問題を前提としているのに対し、測定や制御が比較的困難である局所的情報から情報源、情報と情報源間の規則性、そして空間媒質のパラメータ等を近似的であれ推定せんとする問題、すなわち、逆問題について述べる逆問題入門である。換言すれば、従来の自然科学は出来上がった系や各種機器内の情報を解析・分析する方法論を追求するために展開されている。これに対し、特定の情報から、系や各種機器全体をおおまかであれ、どのように設計すべきか、情報と情報源間の因果関係や材料の性質などを系統的に探査する方法論を模索するのが本稿の目的である。このような意味から、本稿で述べる考え方、解釈そして方法論が全てでは無く、また必ずしも唯一の逆問題の捕らえ方でもない。あくまでも筆者の限られた知識に基づく独断と偏見に満ちた内容となることを容認して頂きたい。

### 3. システム方程式

#### 3.1 順問題

電磁界系だけでなく多くの工学・理学における解析問題は、微分または積分形の支配方程式を解くことに帰する。デジタル計算機を前提とする数値解析では、有限要素法、有限差分法および積分方程式法等で代表される離散化法を用いて、支配方程式を連立方程式、すなわち、線形システム方程式の解に帰することができる[4]。いま、 $C$ 、 $X$ 、 $Y$  をそれぞれシステム方程式の係数行列、出力さらに入力ベクトルとすれば、システム方程式は、

$$CX = Y \quad (1)$$

の形に書くことができる。一般に適切に導かれた(1)式の係数行列  $C$  は正方行列であり逆行列を持つ非特異行列である。順問題は、(1)式の両辺に

係数行列  $C$  の逆行列を乗算し、出力ベクトル  $X$  を求める問題である。このように逆行列が計算可能で、解ベクトル  $X$  が一意的に計算可能なシステムを適切な線形システム(well posed linear system)と呼ぶ。(1)式で出力ベクトル  $X$  が与えられ、入力ベクトル  $Y$  を求める問題を考える。この問題は、出力が与えられ入力を求める問題であるため逆問題と解釈されがちであるが、単に出力ベクトル  $X$  を(1)式に代入して入力ベクトル  $Y$  を求める問題であり解は一意的に求められる。このため、直接問題(direct problem)と呼ばれる。

#### 3.2 逆問題

〈IS 問題〉 図 1 に示すようにフィルム幅  $l$  に電流が流れていて、フィルムの上方に位置するフィルムに平行な磁界の測定区間  $ol$  を考え、磁界が  $n$  点等間隔で測定される。フィルムは等間隔に  $m$  個に分割され、この各点に集中された  $m$  点の電流を求める問題を考える。

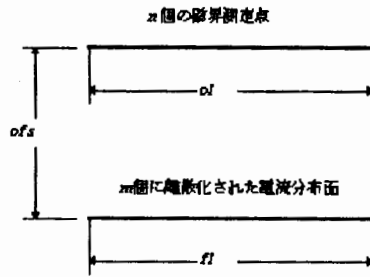


図 1. 磁界測定から電流分布を探査するモデル

図 1 の関係は Ampere の法則

$$H_i = \frac{i_j}{2\pi r_{ij}} \quad (2)$$

$r_{ij}$  は磁界  $H_i$  と電流  $i_j$  間の距離である。

(2) 式から、(3) 式のシステム方程式が得られる。

(3) 式はアンペアの法則から得られる IS 問題のシステム方程式である。一般に式の数  $n$  よりも未知数の数  $m$  が多く、(3) 式の係数行列  $D$  は長方形行列となり、 $D$  の逆行列が求められない。このような線形システムを不適切な線形システム (ill posed linear system) と呼ぶ。

**<IR 問題>** (3)式はアンペアの法則から得られた。しかし、アンペアの法則が既知でなく、 $a$ と $a$ が既知であるとき電流と磁界間の関係を表すパラメータ  $a, b, c, d$  を求めたい。 $a, b, c, d$  は電流と磁界間のパラメータであるから、次式が成り立つ。

(4)式は  $i_1, i_2$  と  $H_1, H_2$  間の関係を司るパラメータ  $a, b, c, d$  を求める IR 問題のシステム方程式である。IR 問題も不適切な線形システムを解くことに帰する。

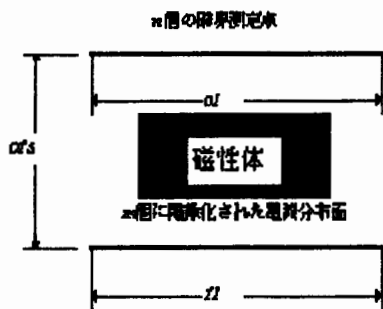


図2. 既知電流分布面と磁界測定点間に未知磁性体が挿入された場合の IP 問題、 $l$  は  $m$  個に等分割され、磁性体は  $k$  個に等分割される

**<IP 問題>** 具体的な例として図2に示す IP 問題を考える。図2で、磁界と電流の関係は

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{X}_{pm} + D\mathbf{Y}_k$$

or

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1e} \\ H_{2e} \\ \vdots \\ H_{ne} \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix} \quad (5)$$

で与えられる。磁性体の等価電流ベクトル  $\mathbf{Y}$  は、(6)式を解くことによって得られることとなる。 $r_{ej}$  は  $H_i$  と磁性体の等価電流  $i_j$  間の距離である。さら

$$\begin{pmatrix} H_{1e} \\ H_{2e} \\ \vdots \\ H_{ne} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{e11} & r_{e12} & \cdots & r_{e1k} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{e21} & r_{e22} & \cdots & r_{e2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{en1} & r_{en2} & \cdots & r_{enk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_{e1} \\ i_{e2} \\ \vdots \\ i_{ek} \end{pmatrix}$$

or

$$\mathbf{X}_{pm} = \mathbf{X}_p - D\mathbf{Y}_k = D_c \mathbf{Y}_k \quad (6)$$

に、磁性体自身は電流を発生するエネルギー源を持たないため、解に対する拘束条件

$$\sum_{i=1}^k i_{ei} = 0 \quad (7)$$

が成り立つ。

(7)式は(8)式のように書けるから、(6)式は(9)式で与えら得る。

$$\mathbf{Y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} i_{e1}' \\ i_{e2}' \\ \vdots \\ i_{ek-1}' \end{pmatrix}$$

or

$$\mathbf{Y}_k = F\mathbf{Y}_k' \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{pm} &= D_c \mathbf{Y}_k \\ &= D_c F \mathbf{Y}_k' \\ &= D_c' \mathbf{Y}_k' \end{aligned} \quad (9)$$

(9)式が IP 問題のシステム方程式である。(9)式から、IP 問題もまた不適切な線形システムを解くことに帰することがわかる。

### 3.3 解の自由度

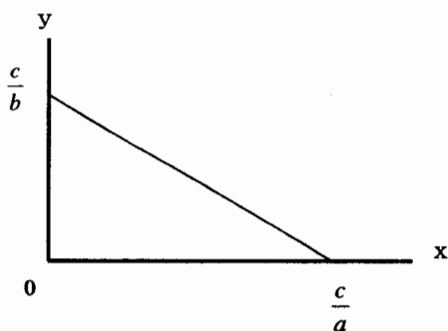


図 3. (10)式の解直線

一般に逆問題は、式の数より未知数の多い不適切なシステム方程式を解くことに帰する。ここでは、最も簡単な例として次式を考える。

$$ax + by = c \quad (10)$$

(10)式で、 $x=0$  のとき  $y=c/b$ ,  $y=0$  のとき  $x=c/a$  であるから、図 3 に示す解直線上の点はすべて(10)式の解である。

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad (11)$$

(11)式は解直線を表し、解は  $x$  が決まれば  $y$  が決まることを意味する。換言すれば、 $x, y$  の何れか一方が決まれば他は従属して決まる。これは重要な関係であり、逆問題では、式の数に等しい数の解が一意的に決まれば残りの解は従属して決まることを意味する。

## 4. 不適切な線形システムの解法

### 4.1 重み付き逆行列法

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c$$

or

$$CX = Y \quad (12)$$

〈定式化〉ここでは、最も簡単な不適切な線形システムである(10)式を考える。(10)式は(12)式の形に書き直すことが出来る。

(12)式の解を、

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} s_0 \\ &= WS \quad (13) \end{aligned}$$

と仮定する。 $w_1, w_2$  は重み係数であり、 $s_0$  が求める解である。(13)式を(12)式へ代入して、重み付き逆行列法の形式的な解法として得られる。

$$CWS = Y$$

or

$$S = (CW)^{-1} Y$$

$$X = W(CW)^{-1} Y \quad (14)$$

〈最小ノルム解〉(14)式で、重み係数行列  $W$  をシステム行列  $C$  の転置行列に選ぶと、

$$\begin{aligned} X &= C^T (CC^T)^{-1} Y \\ &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)^{-1} c = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} c \quad (15) \end{aligned}$$

を得る。この解は図 3 の原点を通過して(11)式の直線と直交する線分の交点座標である。このため、解のノルムは最小となる。

〈テイラー級数解〉式の数が  $n$  個のシステムで、解の存在する空間の座標を  $\alpha$  とすれば、解がテイラー級数展開可能で、

$$s(\alpha) = s_0 + \alpha s_1 + \dots + \alpha^{n-1} s_{n-1} \quad (16)$$

とする。(10)式は式の数が 1、未知数の数が 2 であるから、

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s_0 \quad (17)$$

と解が仮定できる。従って、(10)式の解は

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \left( \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \mathbf{c} \\
&= \frac{c}{a+b} \\
\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{c}{a+b} \\ \frac{c}{a+b} \end{bmatrix} \quad (18)
\end{aligned}$$

として与えられる。

**<フーリエ級数解>** 式の数が  $n$  個のシステムで、解の存在する空間の座標を  $\alpha$  とすれば、解がテイラー級数展開可能で、

$$\begin{aligned}
s(\alpha) &= s_0 + s_1 \cos \alpha + \dots \\
&\quad + s_{n-1} \sin[(n-1)\alpha] \quad (19)
\end{aligned}$$

とする。(19)式は式の数  $n$  が 1、未知数の数が 2 であるから、定数項のみとなり、(18)式と同じ解となる。

#### 4.2 ウェーブレット近似解

**<イメージ行列法>** いま、(12)式を  $n$  行  $m$  列のシステム行列  $C$  を持つ線形システムとしよう。解ベクトル  $\mathbf{X}$ 、入力ベクトル  $\mathbf{Y}$ 、およびシステム行列  $C$  を、それぞれ  $m, n, n \times m$  のイメージデータとみなす。 $n, m$  次のウェーブレット変換行列をそれぞれ  $W_n, W_m$  とすれば、システム方程式のウェーブレット変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
W_n \mathbf{Y} &= (W_n C W_m^T) W_m \mathbf{X} \\
\mathbf{Y}' &= C' \mathbf{X}' \quad (20)
\end{aligned}$$

(20) 式で、ウェーブレットスペクトラム行列  $C'$  は依然として  $n$  行  $m$  列であるから逆行列を計算できない。このため、 $C'$  の 1 行 1 列を含むマザーウェーブレット近傍の正方行列を切り出し、この正方行列の逆行列で  $C'$  の近似逆行列を計算し、近似解ベクトル  $\mathbf{X}''$  を求める。この近似解ベクトル  $\mathbf{X}''$  を

$$\mathbf{X}_{\text{appro}} = W_m^T \mathbf{X}'' \quad (21)$$

の演算で原空間へウェーブレット逆変換することで近似解  $\mathbf{X}_{\text{appro}}$  を得る。これが、ウェーブレット変換による近似解法の基本的な考え方である。このような考え方をイメージ行列法と呼ぶ [3,4]。

**<解精度の評価>** イメージ行列法で近似解が得られる条件は、 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, C$  行列をウェーブレット変換した場合、各行列のウェーブレットスペクトラム  $\mathbf{X}', \mathbf{Y}', C'$  のマザーウェーブレット近傍にそれぞれの支配的成分がイメージデータとして圧縮されていること。およびシステム行列  $C'$  のスペクトラム  $C'$  のマザーウェーブレットを含む正方行列が逆行列を持つことである。また、この正方行列の次数は大きい程正確な近似解となる。一般にウェーブレット変換は、マザーウェーブレットを先頭として、イメージを構成する要素の平均値から要素間の変化率の高い要素を順にソーティングする。このため、ウェーブレット変換による近似解は式を平均的に満足する解を与える。また、ウェーブレット変換はイメージデータに周期性を仮定して行われるため、意図的にデータへゼロ要素を追加することで近似誤差ノイズを低減できる [4]。

#### 4.3 サンプルパターンマッチング近似解

**<定式化>** (12)式を  $n$  行  $m$  列のシステム行列  $C$  を持つ線形システムとしよう。この線形システムを次式のように正規化する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y} &= C\mathbf{X} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{c}_i \\
\frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} &= \sum_{i=1}^m x_i \frac{|\mathbf{c}_i|}{|\mathbf{Y}|} \frac{\mathbf{c}_i}{|\mathbf{c}_i|} \\
\text{or} \\
\mathbf{Y}' &= \sum_{i=1}^m x_i' \mathbf{c}_i' \\
&= C' \mathbf{X}' \quad (22)
\end{aligned}$$

(22)式は既知ベクトル  $\mathbf{Y}$  が必ずシステム行列  $C$  を構成する列ベクトル  $\mathbf{c}_i (i=1, 2, \dots, m)$  の線形結合で与えられることを利用して、ベクトル  $\mathbf{Y}$  のパターンと最も良く一致するベクトル  $\mathbf{c}_i$  を内積演算

$$\gamma_i = \mathbf{Y}^T \mathbf{c}_i \quad (23)$$

で求めることを意図している。評価関数は

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}^{(k)}) &= \left( \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \right)^T \frac{\mathbf{CX}^{(k)}}{|\mathbf{CX}^{(k)}|} \\ &= \mathbf{Y}^T \frac{\mathbf{CX}^{(k)}}{|\mathbf{CX}^{(k)}|} \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (24)$$

である。(24)式から、

$$f(\mathbf{X}^{(k)}) - 1 = \left( \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \right)^T \frac{\mathbf{CX}^{(k)}}{|\mathbf{CX}^{(k)}|} - 1$$

or

$$\frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} = \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \left( \frac{\mathbf{Y}}{|\mathbf{Y}|} \right)^T \frac{\mathbf{CX}^{(k)}}{|\mathbf{CX}^{(k)}|} = \frac{\mathbf{CX}^{(k)}}{|\mathbf{CX}^{(k)}|}$$

$$\mathbf{Y}' = \frac{\mathbf{CX}^{(k)}}{|\mathbf{CX}^{(k)}|} \quad (25)$$

を得る。(25)式を満足する解ベクトルは、初期値を

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{C}^T \mathbf{Y}' \quad (26)$$

として、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Y}^{(1)} &= \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(0)}}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(0)}|} \\ &= \mathbf{C}' \Delta \mathbf{X}^{(1)} \end{aligned} \quad (27)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)} &= \mathbf{X}^{(0)} + \Delta \mathbf{X}^{(1)} \\ &= \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{Y}^{(1)} \\ &= \mathbf{X}^{(0)} + \mathbf{C}^T \left( \mathbf{Y}' - \frac{\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(0)}}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(0)}|} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

を得る。よって、反復解の一般式は

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k)} &= \mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{C}^T \Delta \mathbf{Y}^{(k-1)} \\ &= \mathbf{C}^T \mathbf{Y}' + \left( I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{CX}^{(k-1)}|} \right) \mathbf{X}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。 $I_m$ は  $m$  次の単位正方行列である。解の評価は反復毎に(24)式で行う。

<収束性> 反復解の収束性は(29)式の状態遷移行列  $P$  の最大固有値が 1 を超えなければ必ず収束する。

$$P = I_m - \frac{\mathbf{C}'^T \mathbf{C}'}{|\mathbf{C}' \mathbf{X}^{(k-1)}|} \quad (30)$$

この条件を証明しておこう。いま、 $\mathbf{X}^{(k-1)}$  が行列  $P$  の固有ベクトルに等しくなるとすれば、 $\lambda$  を  $P$  の固有値として、

$$P \mathbf{X}^{(k-1)} = \lambda \mathbf{X}^{(k-1)} \quad (31)$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(k)} &= \lambda \mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{X}^{(0)} \\ &= \lambda (\lambda \mathbf{X}^{(k-2)} + \mathbf{X}^{(0)}) + \mathbf{X}^{(0)} \\ &= (\lambda^k + \lambda^{k-1} + \dots + I_m) \mathbf{X}^{(0)} \end{aligned} \quad (32)$$

である。よって、 $k \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{X}^{(k)}$  が収束する条件は固有値  $\lambda$  の絶対値が 1 より小さくなければならない。

## 5. サンプル例題

### 5.1 1次元問題

図 1 に示すように 1 次元平面上の電流分布を平面に平行な面上で測定された磁界から計算する IS 型逆問題を考えよう。

<最小ノルム法> 図 1 の例で  $fl=1\text{m}$ 、 $ol=1\text{m}$ 、 $ofs=0.01\text{m}$ 、 $n=5$ 、 $m=20$  と設定する。式の数 5 個、未知数の数が 20 個の問題である。

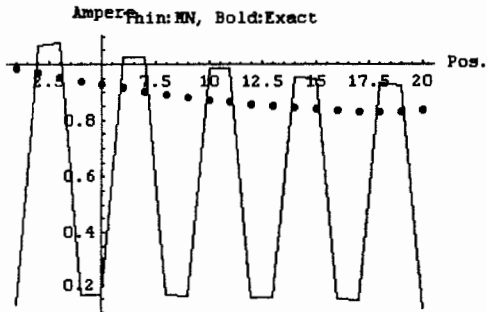


図 4 最小ノルム解  
点線は正解、実線が最小ノルム解

図4が最小ノルム法による解である。振動的な解となっている。

〈テイラー級数解法〉 図5にテイラー級数解を示す。かなり良好な解が得られている。テイラー級数の収束性を調べるため、係数を書き出しておこう。

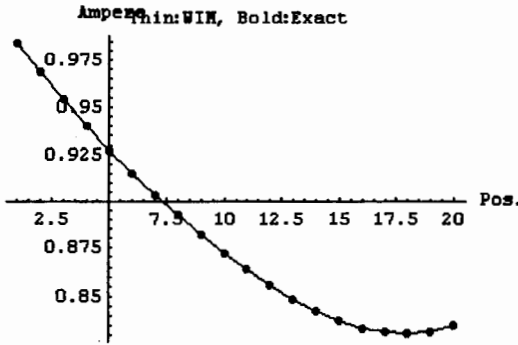


図5 テイラー級数解  
点線は正解、実線がテイラー級数解

第1項から5項までの係数は以下の党利である。単調に収束しているから、テイラー級数法は正しい解を与えていることが確認できる。

$0.983816170634921505'$ ,  $-0.314349206349222143'$ ,  $0.180238095238134832'$ ,  
 $-0.120634920634904155'$ ,  $0.1111111111111100058'$

〈フーリエ級数法〉 図6にフーリエ級数法による解を示す。フーリエ級数解もまた良好な解を与える。

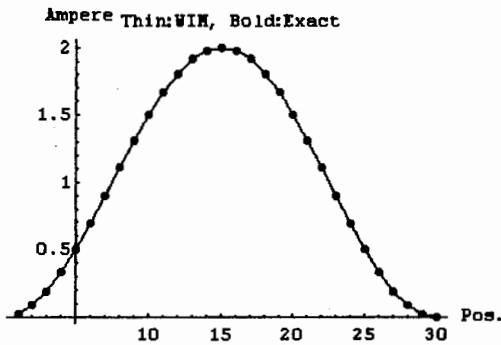


図6 フーリエ級数解  
点線は正解、実線がフーリエ級数解

フーリエ級数の収束性を調べるため、係数を書き出しておこう。

$1.000000000000000066'$ ,  $-0.978247600733805866'$ ,  $0.207911690817759531'$ ,  $0, 0$

完全に係数は収束している。従って、フーリエ級数法は正しい解を与えている。

〈ウェーブレット近似解法〉 図1の問題で、 $n=25, m=50$ とした場合のシステム行列を図7に示す。

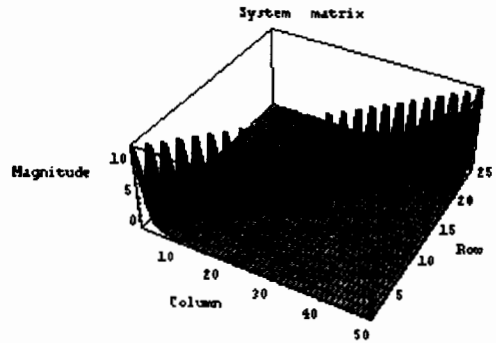


図7  $n=25, m=50$ とした場合のシステム行列

図8 仮定したモデル電流を示す。高周波成分は意図的に含めている。

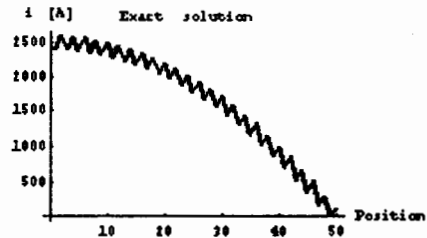


図8 仮定したモデル電流

図9はウェーブレット変換で求めた近似解である。基底関数はベイキン(Baylkin)の12次である。図8の高周波成分が削除された形で近似解が得られている。



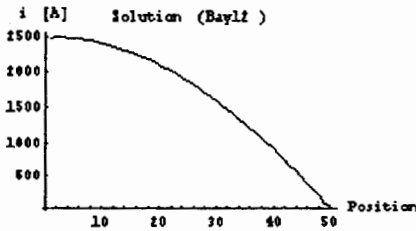


図9 ウェーブレット変換で求めた近似解  
基底関数はベイキン(Baylkin)の12次

ウェーブレット変換による近似解は平均的な意味で良好な結果を与えるが、常に良い結果が期待できるとは限らない。この理由は、ウェーブレット変換された解の支配的成分がマザーウェーブレット近傍に集中することを前提としているためである。

## 5.2 2次元問題

2次元問題の例として、図10に示す放射線源探査問題を考える。

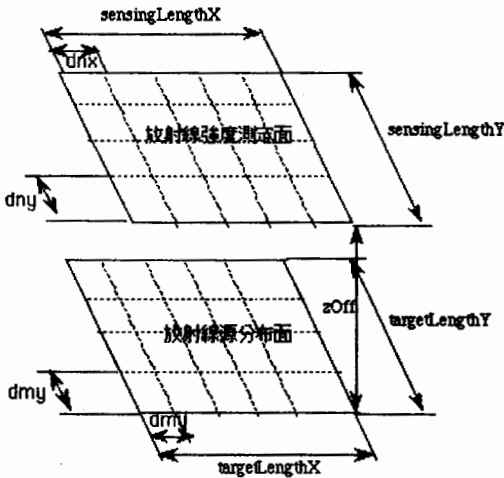


図10. 放射線源探査問題

図10のモデルは、部屋の床面に分布した放射線源を天井に装着したセンサーで測定し、探査することを想定している。放射線源が分布する面と放射線強度を測定する面は同一の寸法で、 $1 \times 1 \text{m}^2$ とする。また、面間の距離は $0.05 \text{m}$ とする。センサーの個数は縦・横共に9点で、合計81点で測定されるとする。さらに、放射線が分布する床

面は縦・横共に20分割され、合計400個の離散化点で代表されるとしよう。すなわち、式の個数 $n$ が81個、未知数が400点の線形システムを解く問題である。

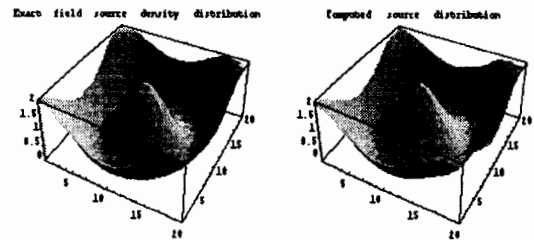


図11 放射線源分布のモデル(左)とフーリエ級数法による計算値(右)

図11はフーリエ級数法による計算値とモデル分布の比較である。非常に良好な結果である。フーリエ級数の係数を図12に示す。

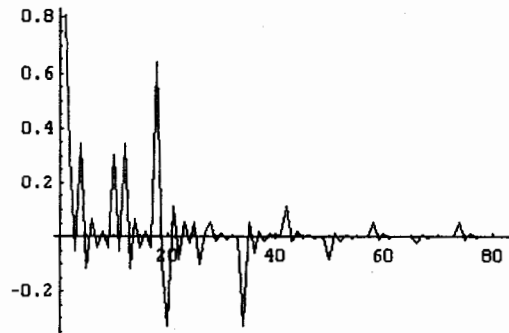


図12 フーリエ級数の係数

図12から、フーリエ級数の係数は減衰振動的に収束し、フーリエ級数法が正しい結果を与えていることが確認できる。

**<サンプルパターンマッチング法>** 図10のモデルで放射線源が分布する面と放射線強度を測定する面は同一の寸法で、 $0.1 \times 0.1 \text{m}^2$ とする。また、面間の距離は $0.01 \text{m}$ とする。センサーの個数は縦・横共に5点で、合計25点で測定されるとする。さらに、放射線が分布する床面は縦・横共に15分割され、合計400個の離散化点で代表されるとしよう。すなわち、式の個数 $n$ が2581個、未知数が225点の線形システムを解く問題である。

図13にモデル放射線源分布を示す。図11のモデルと異なり、局所化された分布である。

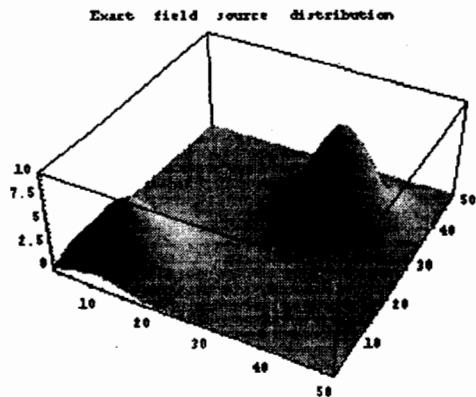


図 13. モデル放射線源分布  
細かい部分を描くため 2500 点  
の離散化を行っている

図 14 にサンプルパターンマッチング法による解を示す。放射線強度の測定点数が比較的小さいにも拘わらず、良好な解を与えている。サンプルパターンマッチング法は逆行列計算を行わずに内積を利用した反復法であるため、原理的にノイズに強い解法である。

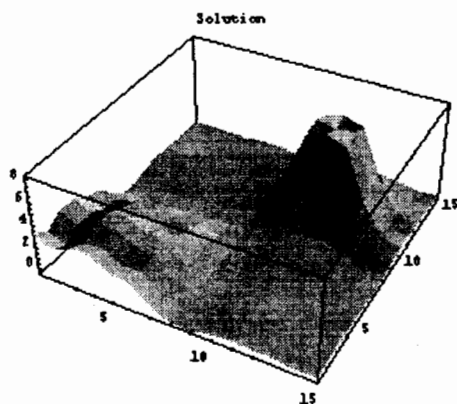


図 14. サンプルパターンマッチング法  
による解

図 15 に反復計算の収束性を示す。ほぼ理論と合致した良好な収束性を示すことが判る。反復回数は 5000 回であるが、インタープリタ型言語の Mathematica、Pentium II 266MHz CPU、160MB RAM のノート PC で計算時間は約 9 秒であった。単純な内積計算の反復であるため、比較的高速な計算が可能である。

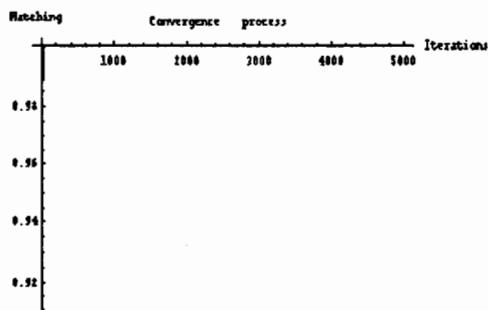


図 15 サンプルパターンマッチング法  
の収束性、縦軸：内積値、横軸：反復回数

## 6. まとめ

本稿は、筆者がここ 10 年近く研究を行っている逆問題と不適切な線形システムの関係コンパクトに纏めたものである。個々の解法を詳しく述べることは出来なかったが、考え方や概念等は把握出来るように述べたつもりである。逆問題に関して何時も活発な議論をして頂いている三菱電機先端総合研究所主任研究員依田潔博士に紙面を借りてお礼を申し上げる。

最近、逆問題解析が見えない部分を推定するコンピュータグラフィックスへ応用できそうな見通しを得た。画像を研究する機会を与えて頂いた法政大学計算科学研究センター教授国井利泰博士、白百合女子大学教授堀井清之博士に紙面を借りてお礼を申し上げる。

## 参考文献

- (1) T.Do, S.Hayano, and Y.Saito, IEEE Trans. on Magn., Vol. 33, No.2, pp.1935-1938, 1997.
- (2) T.Do, S.Hayano, and Y.Saito, IEEE Trans. on Magn., Vol. 33, No.2, pp.1962-1965, 1997.
- (3) K.Yoda and Y.Saito, IEEE Trans. on Magn., Vol. 33, No.2, pp.1995-1997, 1997.
- (4) 斎藤兆古、「ウェーブレット変換の基礎と応用」、朝倉書店、1998 年 4 月