

# 不適切な線形システムの Wavelet 変換による 解析法の提案

Wavelet Analysis of Ill Posed Linear Systems

石田則道<sup>1)</sup>、小口雄康<sup>2)</sup>、斎藤兆古<sup>3)</sup>

Norimichi ISHIDA, Yuko OGUCHI, Yoshifuru SAITO

- 1) 工修) 法政大学 計算センター助手 (〒184 小金井市梶野町 3-7-2, ishida@ai.tama.hosei.ac.jp)
- 2) 理博) 法政大学 計算センター教授 (〒184 小金井市梶野町 3-7-2, oguchi-yuko@koganei.hosei.ac.jp)
- 3) 工博) 法政大学 計算センター所長 (〒184 小金井市梶野町 3-7-2, ysaitoh@ysaitoh.ee.hosei.ac.jp)

This paper proposes a new methodology solving for the ill posed linear systems. Key idea is that the system matrix is regarded as an image data. Applying the discrete wavelet transformation to this system matrix yields an approximate inverse matrix. Thus, we succeeded in solving the ill posed linear systems. An example concerning with the inverse problem in magnetostatic fields demonstrates the usefulness of our methodology.

*Key Words: Discrete Wavelet Transformation, Ill-posed Linear System, Inverse Problems*

## 1. はじめに

不適切なシステムとして、1) 未知数と式の数が同じであるがシステム行列の逆行列が存在しない(取りにくい)場合(ヴァンデルモンデ型)、2) 未知数の数より式の数が多の場合(最小2乗型)、3) 未知数の数より式の数が少ない場合(観測値が十分得られない)がある[1]。本報告は3)について検証する。

このような不適切なシステムは、出力の一部から入力源を求める逆問題を扱うと必ずおこる。従来、このような不適切な問題を解くには何らかの拘束条件を付加するのが通常であった。難しいのは、付加する拘束条件を如何に設定するかであり、往々にして、個々の問題に対して経験的に拘束条件を決め、得られた結果に普遍性が無くなることが多い。

これに対し、逆問題のシステム行列となる長方形行列をイメージデータと見なし、これに離散値系ウェーブレット変換[2]を適用することで、システム行列の支配的要素を抽出することで、近似逆行列を求める一般的な手法を本論文は提案する。具体例として、磁界系モデルを考え、電流分布の解析解を仮定し、磁界分布から磁界源となる電流分布を推定する逆問題を取り上げる。

## 2. 離散値系ウェーブレット変換

### (1) 基礎方程式

逆問題のシステム方程式は、次式のように記述できる。

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{C}_{nm} \cdot \mathbf{Y}_m \quad (m \gg n) \quad (1)$$

$\mathbf{X}_n, \mathbf{C}_{nm}, \mathbf{Y}_m$  は、それぞれ、フィールドの測定から得た  $n$  次の既知ベクトル、グリーン関数もしくはその空間微分から得る  $n$  行  $m$  列のシステム行列、および、求めるべき  $m$  次の未知ベクトルである。解析法としては、形式的に逆マトリックス  $\mathbf{C}_{mn}^{-1}$  を考え、

$$\mathbf{C}_{mn}^{-1} \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{C}_{mn}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{nm} \cdot \mathbf{Y}_m \quad (2)$$

から

$$\mathbf{Y}_m = \mathbf{C}_{mn}^{-1} \cdot \mathbf{X}_n \quad (3)$$

$$\mathbf{C}_{mn}^{-1} \cdot \mathbf{C}_{nm} = \mathbf{I}_{mm} \quad (\text{単位マトリックス})$$

を求める。しかし、システム行列が長方形の場合、直接逆行列は作れない。そこで、ウェーブレット変換を用い、近似逆行列を用いて解析する。

### (2) ウェーブレット変換

$n$  次、 $m$  次のウェーブレット変換行列を  $\mathbf{W}_n, \mathbf{W}_m$  とすれば、(1) 式のシステムのウェーブレット変換は次

式のようになる。

$$\mathbf{X}'_n = \mathbf{C}'_{nm} \cdot \mathbf{Y}'_m \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'_n &= \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{X}_n \\ \mathbf{C}'_{nm} &= \mathbf{W}_n \cdot \mathbf{C}_{nm} \cdot \mathbf{W}_m^T \\ \mathbf{Y}'_m &= \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{Y}_m \end{aligned} \quad (5)$$

### (3) 近似逆行列

$\mathbf{C}'_{nm}$  はシステム行列のウェーブレットスペクトラム分布 (元のシステム行列と同じ  $n \times m$  の長方形列) を示している。ウェーブレットスペクトラムの特徴はスペクトラム行列の要素の配置にある。通常、絶対値の大きい要素は 1 行 1 列の要素 (マザーウェーブレット) を中心として分布する。すなわち、ウェーブレット変換はシステム行列全体の持つ情報をマザーウェーブレット近傍に集めてしまう性質を持っている。そこで、全体の情報を維持しつつ長方形列の逆行列を近似的に求めることで、逆問題解析が可能になる。しかし、スペクトラム行列の特定領域に元のシステム行列の情報をいかに集約しても  $n \times m$  の長方形列の逆行列は求められない。そこで、長方形列からマザーウェーブレットを含み、式の数に等しい  $n \times n$  の正方行列  $\mathbf{C}'_{nn}$  を取り出し、その行列でシステム行列全体の情報を代表させる。検討しなければならないことはこの取り出した行列  $\mathbf{C}'_{nn}$  に逆行列  $\mathbf{C}'_{nn^{-1}}$  が存在するかであるが、ここでは、 $\mathbf{C}'_{nn^{-1}}$  が存在すると仮定し、逆問題を解析する。目的とする解  $\mathbf{Y}$  の次数は  $m$ 、入力ベクトル  $\mathbf{X}$  の次数は  $n$  であるから、逆行列は元のシステム行列  $\mathbf{C}'_{nm}$  を転置した形の  $m$  行  $n$  列になる。全てを零要素とする  $m \times n$  の行列を  $\mathbf{C}_{mn\text{zero}}$  とすれば、スペクトラム行列  $\mathbf{C}'_{nm}$  の近似逆行列  $\mathbf{C}'_{mn^{-1}}$  は

$$\mathbf{C}'_{mn^{-1}} = \mathbf{C}_{mn\text{zero}} + \mathbf{C}'_{nn^{-1}} \quad (6)$$

で与えられる。但し、 $\mathbf{C}'_{nn^{-1}}$  は  $\mathbf{C}_{mn\text{zero}}$  行列の (1, 1) 要素から (n, n) に加えられる。次はこの近似逆スペクトラム行列 ( $\mathbf{C}'_{mn^{-1}}$ ) をウェーブレット逆変換して元の行列の逆変換を作る。ウェーブレットスペクトル空間では (4) と (6) 式から、

$$\mathbf{C}'_{mn^{-1}} \cdot \mathbf{X}'_n = \mathbf{Y}'_m \quad (7)$$

が成立し、(7) 式を書き直すと、

$$\mathbf{C}'_{mn^{-1}} \cdot (\mathbf{W}_n \cdot \mathbf{X}_n) = \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{Y}_m \quad (8)$$

となり、(8) 式の両辺に  $\mathbf{W}_m$  の転置 (逆) 行列  $\mathbf{W}_m^T$  を掛けると、

$$(\mathbf{W}_m^T \cdot \mathbf{C}'_{mn^{-1}} \cdot \mathbf{W}_n) \cdot \mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_m \quad (9)$$

となる。従って、元のシステム行列  $\mathbf{C}_{nm}$  の近似行列  $\mathbf{C}'_{mn^{-1}}$  は

$$\mathbf{C}'_{mn^{-1}} = \mathbf{W}_m^T \cdot \mathbf{C}'_{nn^{-1}} \cdot \mathbf{W}_n \quad (10)$$

となり、(10) 式に  $\mathbf{X}_n$  を掛けて、 $\mathbf{Y}_m$  が求まる。

### 3. フィールド源推定への応用

図 1 にフィルム導体内の電流分布推定問題の概略図を示す。測定面で磁界分布が  $n$  点で測定され、フィルム導体を通電方向に直角に  $m$  個に分割した場合のシステム方程式はアンペア (Ampere) の法則  $H = i / (2\pi r)$  から、次式で記述できる。

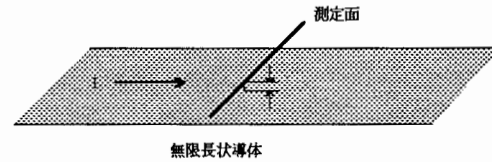


図 1 解析モデル

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{C}_{nm} \cdot \mathbf{I}_m$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{bmatrix} \frac{1}{r_{11}} & \frac{1}{r_{12}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{r_{1m}} \\ \frac{1}{r_{21}} & \frac{1}{r_{22}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{r_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{r_{n1}} & \frac{1}{r_{n2}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{r_{nm}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix} \quad (11)$$

$\mathbf{H}_n, \mathbf{C}_{nm}, \mathbf{I}_m$  はそれぞれ測定される  $n$  次の磁界分布ベクトル、分割した各電流と測定間の距離、および、求める  $m$  次の電流分布ベクトルであり、(1) 式のシステム方程式となる。

求めたいのは電流分布であるが、電流分布の数は非常に多い。従って、測定できる磁界の数には限りがあり、この問題のシステム方程式は一意的な解は持たない。しかし、局所的に測定された磁界分布と、システム行列  $\mathbf{C}_{nm}$  を二次元信号データと見なし、ウェーブレット変換による解析で電流分布を推定する。本稿ではウェーブレット

ット変換行列の基底関数としてドッビーシー (Daubechies) の16次[3]を用い、測定点数は $n=16$ 、電流推定点数は $m=64$ とした。厳密な3つの電流分布パターン (左、中心、右寄り) (図2)、および、それを基に計算した磁界分布ベクトルから推定される電流分布 (図3)、厳密な電流分布から再現した法線方向の磁界分布と推定した電流分布からの磁界分布 (図4)、さらにシステム行列 (図5) とウェーブレットスペクトラム (図6) を示す。

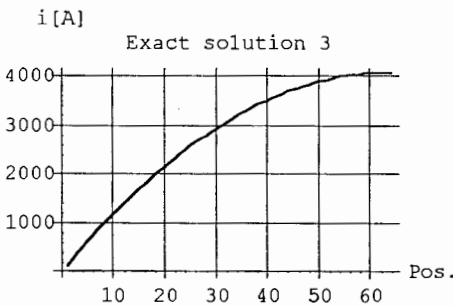
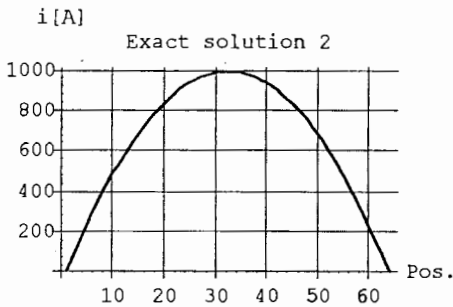
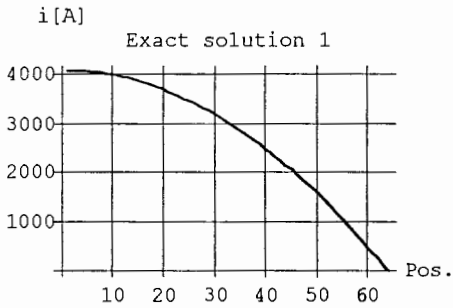


図2 厳密な電流分布

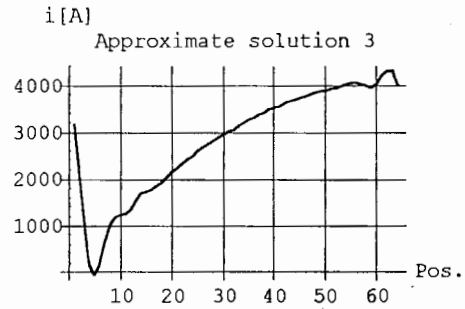
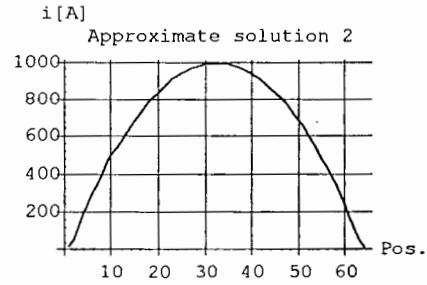
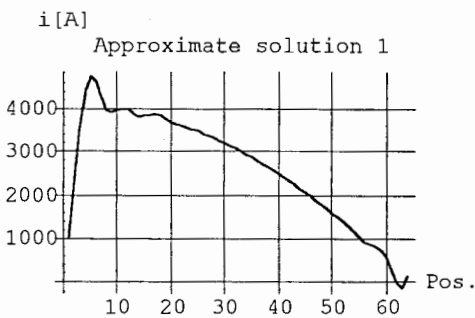


図3 推定される電流分布

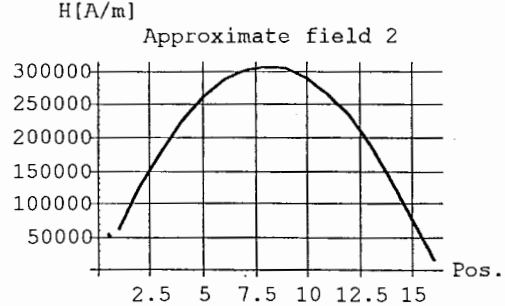
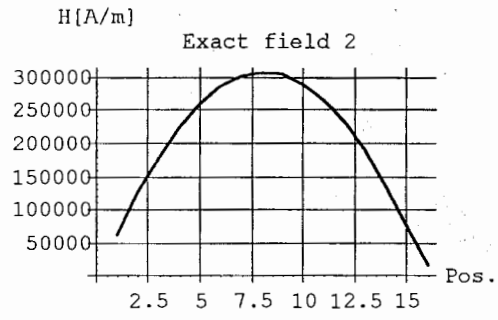


図4 磁界分布 (Solution 2による)

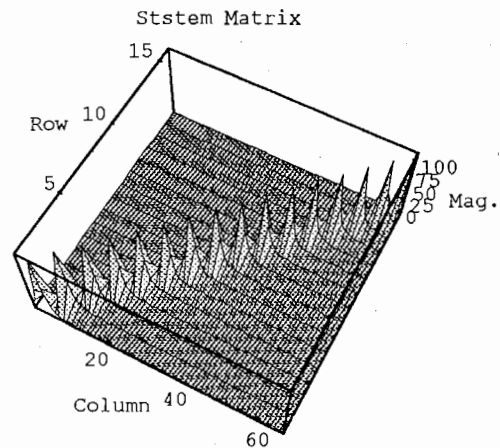


図5 システム行列

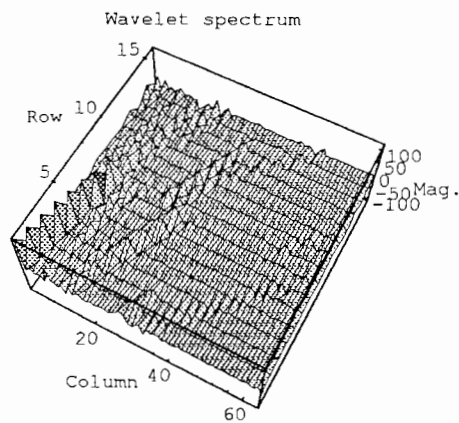


図6 ウェーブレットスペクトラム

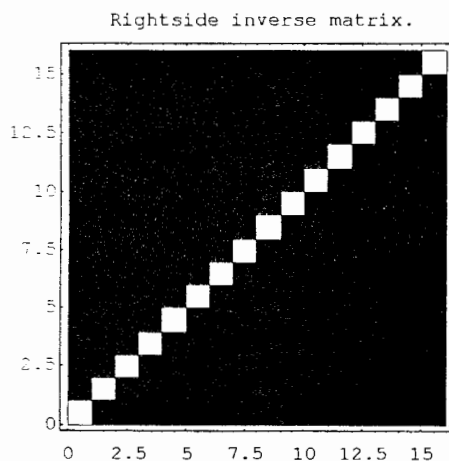


図7 右側逆行列計算

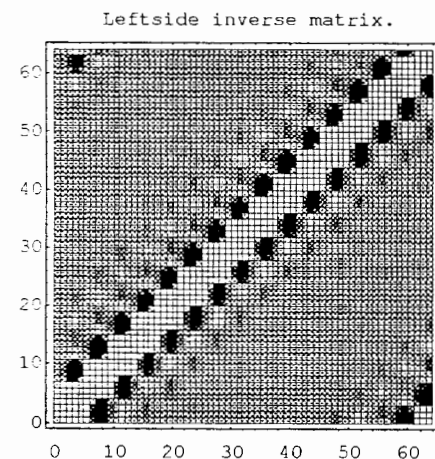


図8 左側逆行列計算

#### 4. 近似逆行列の評価と計算結果

$n \times m$  のスペクトラム行列

から切り出した  $n \times n$  の正方行列  $C'_{nm}$  に、逆行列が存在するかが問題である。仮に  $n \times n$  の正方行列  $C'_{nm}$  が存在しても (6) 式の逆行列  $C'_{nm}$  が本当に元の行列  $C'_{nm}$  の逆行列になっているかどうかである。ここでは (12)

式の右側逆行列の計算結果が単位正方行列になるか、解の存在を調べる。さらに、(13) 式の左側逆行列計算が重要なポイントであり、単位行列にならなくても対角線上に一定値が並べばかなり正確な解が期待できる。それぞれの計算結果を示す (図7、8)。

$$I_{nm} = C_{nm} \cdot C_{mn}^{-1} \quad (12)$$

$$I_{mm} = C_{mn}^{-1} \cdot C_{nm} \quad (13)$$

図7から解は必ず存在することを意味し、さらに解がある幅を持った範囲で、近似的に決まることを示している (図8) [4]。

図2、3は厳密な電流分布と求められた電流分布であり、両方を比較すると、近似解は両端で歪みを生じるが、それを除けば厳密解と良く一致している。図4は、近似解が与える磁界分布と厳密解の与える磁界分布を示す。両者は完全に一致していることから、近似解はシステム方程式 (1) の解であると考えられる。

以上は、長方形行列を2次元ウェーブレット変換し、スペクトラムの大きい部分から式の数に等しい大きさの正方行列部分を取り出して全体のシステム行列の性質を抽出する考え方に基づいている。その妥当性を吟味すると、解ベクトル  $\mathbf{Y}$  のウェーブレット変換  $\mathbf{Y}'$  はウェーブレット変換の性質から、ベクトル  $\mathbf{Y}'$  の頭部に絶対値の大きな要素が集中する。そのため、(10) 式の近似逆行列  $C_{mn}^{-1}$  は解ベクトル  $\mathbf{Y}$  をスペクトラム解ベクトル  $\mathbf{Y}'$  の第1要素から第  $n$  要素までに圧縮した解ベクトルを与えることになる。

#### 5. まとめ

$16 \times 64$  のシステム行列を  $16 \times 16$  に縮小して、不適切システムの逆問題を解いたが、厳密解を良く近似する解が得られた。これは、マザーウェーブレット近傍のウェーブレットスペクトラムがシステム行列全要素の情報を含んでいるので、逆問題の近似解が得られる可能性がある。言い換えれば、いかなる与えられた線形システムからも、ウェーブレット変換によって可能な限りの情報が抽出できることを意味する。

#### 参考文献

- 1) 齊藤兆古: Mathematica によるウェーブレット変換, 朝倉書店, 1996
- 2) W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: "NUMERICAL RECIPES in C", CAMBRIDGE U. PRESS 1985
- 3) I. Daubechies: "Ten Lectures on Wavelets", siam 1995
- 4) G. ストラング: 「線形代数とその応用」, 産業図書, 第16版, 1995