

# 電流分布の一推定法

An Estimation Method of Current Distributions

板垣 英美      早野 誠治      斉藤 兆古  
E. Itagaki,      S. Hayano, and Y. Saito

法政大学      工学部

College of Engineering, Hosei University

## 1. まえがき

いわゆる順問題においても、従来の解析的方法では、取り扱いを容易にするために単純化したモデルを導き解析的な解を求めるのが通例であった。これに対し、近年広汎な普及がなされているデジタル計算機を前提とする数値解析法は、従来の解析では不可能であった飽和現象や履歴現象を呈する問題に対しても近似解とはいえ解析を可能としつつある。[1-3]

このように、順問題ですら従来解析が容易でなかった問題が数値解法によって解析が可能となったのは、大部分がデジタル計算機の巨大な計算能力に負うものである。現在の数値解析技術は明らかに古典的な解析技術の延長線上にあり、従来不可能であった問題を解析可能とし、明確な進歩をもたらした。

しかし、結果から原因をもとめるいわゆる逆問題に対しては、現在活用できる理論的な基礎が大部分順問題を前提として確立しているため、依然としてデジタル計算機の巨大な計算能力を前提としても大きな進歩はなされていない。

本稿は、材料中の欠損部推定いわゆる非破壊検査や生体中の異常診断などに広汎な応用が期待できる、静的な二次元磁界系の逆問題を対象とする解析の一方法を提唱し、逆問題解析の糸口を見いだそうとするものである。

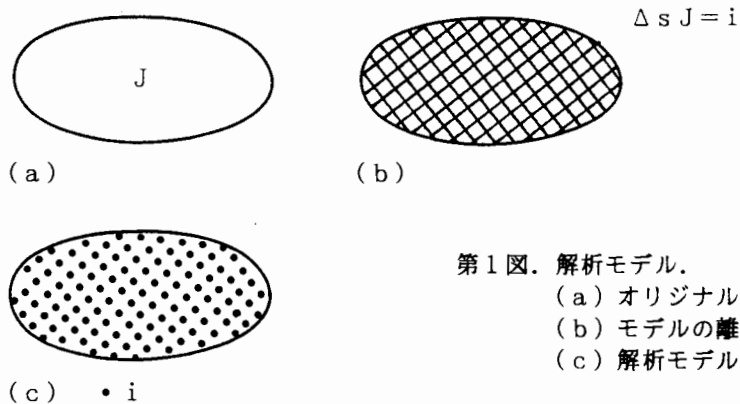
## 2. 理 論

### 2. 1. 基礎的な考え方

磁界分布から磁界源となる電流分布を求める場合、無限に広がる磁界分布がすべて与えられたとき、磁界源となる電流分布はユニークに求められる。従って、磁界分布の一部が与えられた場合、理論的には一意的な解が得られないことを前提に逆問題を解くものとする。通常、与えられた磁界分布から磁界源となる電流の位置や大きさを求める場合、仮定した入力源が測定点に与える磁界とその測定値間の差（これは線形空間での距離に相当する）を最小にする方法が広汎に使われている。[4] しかし、本稿ではこの線形空間での距離に基づく方法ではなく、仮定した入力点が測定点に与える磁界のパターンと磁界の測定値が構成するパターン間の一致（線形空間での角度に相当する）を最大にする方法を採用する。[5-7] これは一様に分布した電流の場合、電流の大きさに無関係に電流入力位置の測定点に与える磁界分布パターンが決まるためである。従って、各入力点に等しい単位電流が流れているものとし、電流の大きさは単位電流の分布から推定するものとする。すなわち、単位電流が集中する部分は電流密度が高く、分散する部分は電流密度が低いものとして表される。なお、本稿で提案する二次元問題に対する方法は、アンペアの法則による基本式をビオ・サバルの法則による式に変更することで、そのまま静的三次元磁界系の電流分布推定に用いられる。しかし、本稿では二次元の推定法を三次元問題に適用する方法について検討する。その方法は、三次元問題を局所的に二次元問題に分解し、二次元の推定結果を組み合わせて三次元の結果を求めるものである。

## 2. 2. 解析モデル

第1 (a) 図に示すように、任意の断面形状を持つ導体に電流が均一に電流密度  $J$  で分布しているとき、導体の周辺磁界分布の測定から導体の断面形状を求める問題を考える。



第1図. 解析モデル.

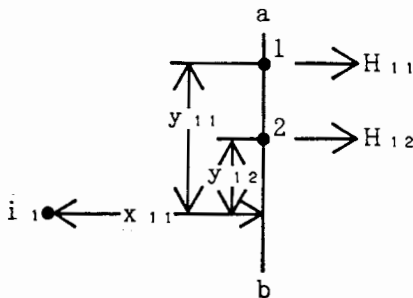
- (a) オリジナル
- (b) モデルの離散化
- (c) 解析モデル

電流密度  $J$  が断面積  $\Delta s$  を流れているものとするれば、断面積  $\Delta s$  上の電流  $i$  は

$$i = \Delta s J, \quad (1)$$

で与えられる。従って、第1 (b) 図に示すように第1 (a) 図の二次元断面を  $\Delta s$  の微小面に分割し、第1 (c) 図に示すように電流  $i$  が導体の断面形状の形に分布した解析モデルを考える。(1)式の電流  $i$  は第1 (b) 図の微小面  $\Delta s$  の中心に位置するものとする。このとき第1 (c) 図の電流  $i$  の分布を求めれば、第1 (a) 図の導体断面形状が求められることとなる。第1 (c) 図の電流はすべて同じ大きさとしているため、不均一な電流分布問題にこの解析モデルを適用した場合、電流密度が高い部分は大きな形状、電流密度が低い部分は小さな形状で表されることになり、得られる解析結果は導体の断面形状ではなく導体断面上の電流分布を表すこととなる。

## 2. 3. システム方程式



第2図. 電流  $i_1$  による、測定点1と2に与える磁界.

第2図に示すように、測定面  $ab$  から  $x_{11}$  の距離に位置する電流  $i_1$  による測定点1と2における磁界  $H_{11}$  と  $H_{12}$  は、

$$H_{11} = i_1 [y_{11}/2\pi(x_{i1}^2 + y_{i1}^2)], \quad (2a)$$

$$H_{12} = i_1 [y_{12}/2\pi(x_{i1}^2 + y_{i2}^2)], \quad (2b)$$

で与えられる。(2a)式と(2b)式をまとめて書くと、

$$\bar{U} = i_1 \bar{X}_1, \quad (3a)$$

$$\bar{U} = [H_{11}, H_{12}]^T, \quad (3b)$$

$$\bar{X}_1 = 1/2\pi [y_{11}/(x_{i1}^2 + y_{i1}^2), y_{12}/(x_{i1}^2 + y_{i2}^2)]^T, \quad (3c)$$

となる。従って、測定点の数を  $n$ 、磁界源となる電流の入力点数を  $m$  とすれば(3a)式は、

$$\bar{U} = \sum_{k=1}^m i_k \bar{X}_k, \quad (4)$$

となる。ここで、 $\bar{U}$  と  $\bar{X}_k$  は  $n$  次の列ベクトルとなる。さらに  $\bar{U}$  の要素は(3b)式の  $H_{11}$ 、 $H_{12}$  などであり、また  $\bar{X}_k$  の要素は(3c)式右辺の要素に対応するものである。

いま行列の要素が列ベクトル  $\bar{X}_k$  からなる  $n$  行  $m$  列の係数行列を  $C_{nm}$  とすれば、(4)式は次の形にも表される。

$$\bar{U} = C_{nm} \bar{I}, \quad (5)$$

ここで、 $\bar{I}$  は  $m$  次の列ベクトルである。すなわち

$$\bar{I} = [i_1, i_2, \dots, i_m]^T, \quad (6)$$

で与えられる。

(4)式または(5)式が逆問題のシステム方程式であり、一般に測定点(既知点または式)の数  $n$  は電流の入力点(未知数)の数  $m$  より少なく、

$$n < m, \quad (7)$$

であるため、電流ベクトル  $\bar{I}$  を一意的に求めることは不可能である。このため逆問題では何等かの拘束条件を見出し解の一意的なものを求めるか、拘束条件を与えずシステム方程式を満足する解のすべてを求め、物理的に意味のある解のみを採用するかなど、何等かの工夫が必要となる。

## 2.4. システム方程式の解法

### 2.4.1. 単一入力 の 推定

(4)式のベクトル  $\bar{U}$  のノルム

$$u_N = \sqrt{\sum_{j=1}^n u_j^2}, \quad (8)$$

を求めこのノルム  $u_N$  を用いてベクトル  $\bar{U}$  を

$$\bar{U}' = (1/u_N) \bar{U}, \quad (9)$$

と正規化する。ここで、(8)式右辺の  $u_j$  はベクトル  $\bar{U}$  の  $j$  行の要素を示す。次に入力点  $k$  のベクトル  $\bar{X}_k$  に対しても同様にノルム  $x_{kN}$  を

$$x_{kN} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_{jk}^2}, \quad (10)$$

と求め、ベクトル  $\bar{X}_k$  を正規化する。すなわち

$$\bar{X}_k' = (1/x_{kN}) \bar{X}_k, \quad (11)$$

とする。ここで(10)式右辺の  $x_{jk}$  はベクトル  $\bar{X}_k$  の  $j$  行の要素を示す。(9)式のベクトル  $\bar{U}'$  と、(11)式のベクトル  $\bar{X}_k'$  間の角度(パターンのマッチング)を次のCauchy-Schwarzの関係式で評価する。

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \langle \bar{X}_k', \bar{U}' \rangle, \\ &= (\bar{X}_k')^T \bar{U}', \\ &= \frac{1}{x_{kN}} \cdot \frac{1}{u_N} \sum_{j=1}^n x_{jk} u_j, \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $\gamma_k$  は

$$-1 \leq \gamma_k \leq 1, \quad (13)$$

の値となる。 $|\gamma_k| = 1$  のとき、ベクトル  $\bar{X}_k'$  と  $\bar{U}'$  間の角度が零となり完全にパターンが一致することを意味する。従って、入力点を  $k = 1 \sim m$  として得られた  $|\gamma_k|$  が最大となる入力点  $k = p$  が求められたとすれば、

$$u_N \bar{U}' = i_p x_{pN} \bar{X}_p', \quad (14)$$

であるから、電流  $i_p$  は、

$$i_p = u_N / x_{pN}, \quad (15)$$

として求められる。

単一入力を求める場合は、距離に基づいても角度に基づいても、入力位置も電流の大きさも平均的な意味で一意的に求められる。

#### 2.4.2. 複数入力の推定

##### (a) 均一電流分布

ある導体の断面に均一に電流が分布して流れている場合である。この条件は静的な磁界系で導体が均質である場合に成り立つ。具体的な例として、第1(c)図の入力点  $k=1$  と  $k=3$  に等しい大きさの電流  $i$  が流れているとする。このとき測定点のベクトル  $\bar{U}$  は、

$$\bar{U} = i \bar{X}_1 + i \bar{X}_3, \quad (16)$$

であるから、(16)式のノルム  $u_N$  は、

$$u_N = i \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{j1} + x_{j3})^2}, \quad (17)$$

となる。従って正規化したベクトル  $\bar{U}'$  は

$$\bar{U}' = \frac{\bar{U}}{u_N} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_3}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{j1} + x_{j3})^2}}, \quad (18)$$

となり、正規化したベクトル  $\bar{U}'$  は入力電流  $i$  の大きさに無関係となる。これは入力電流の大きさに関係なく、入力の位置だけを求めるパターンマッチング法が、均一電流分布で複数個の入力点を求める問題に有効であることを意味する。よって、入力点のベクトル  $\bar{X}_k$  ( $k=1 \sim m$ ) に対して(10)式のノルム  $x_{kN}$  を求め(11)式によって  $\bar{X}_k$  を正規化し、 $\bar{X}_k'$  を得る。このようにして得られたベクトル  $\bar{X}_k'$  と  $\bar{U}'$  間の角度を(12)式のCauchy-Schwarzの関係式で評価する。その結果、最も支配的 ( $|\gamma_k|$  が最も1に近い) な入力点  $p$  が求められたとする。次に、この入力点  $p$  に他の残りの入力点のベクトルを追加する。すなわち  $\bar{X}_p^{(k)}$  を、ベクトル  $\bar{X}_p$  にベクトル  $\bar{X}_k$  を加えたベクトルとして

$$\bar{X}_p^{(k)} = \bar{X}_p + \bar{X}_k, \quad k=1 \sim m, \quad k \neq p, \quad (19)$$

を求める。ここで、 $\bar{X}_p$  は最初の入力点  $p$  によるベクトルで、 $\bar{X}_k$  は残りの入力点によるベクトルである。(19)式のベクトル  $\bar{X}_p^{(k)}$  のノルム

$$x_{pN}^{(k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_{jp} + x_{jk})^2}, \quad (20)$$

$$k=1 \sim m, \quad k \neq p,$$

を求め、ベクトル  $\bar{X}_p^{(k)}$  を

$$\overline{X}_p^{(k)'} = (1/x_{pN}^{(k)}) \overline{X}_p^{(k)}, \quad (21)$$

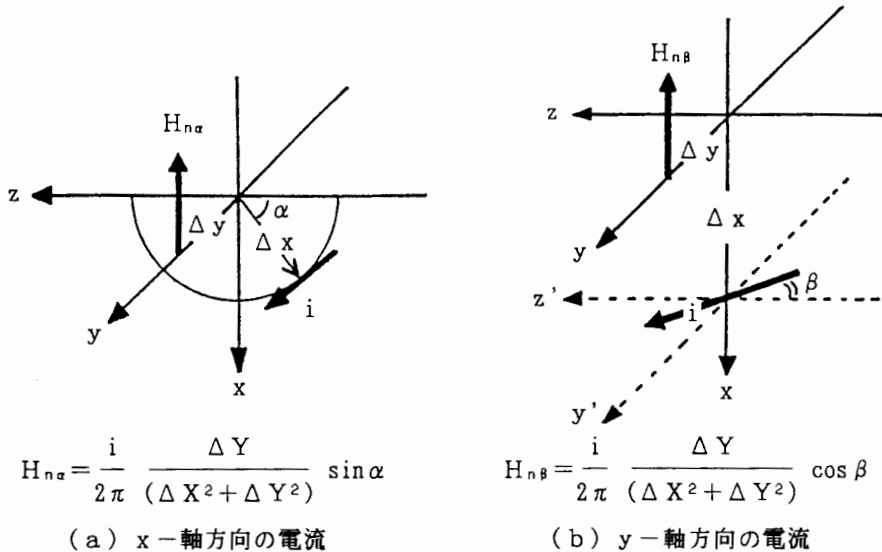
として正規化する。(21)式の $\overline{X}_p^{(k)'}$ とノルム $u_N$ で正規化されたベクトル $\overline{U}'$ 間のパターンのマッチングをCauchy-Schwarzの関係式(12)で評価する。その結果、 $|\gamma_k|$  ( $k \neq p$ )が最大となる入力点が第2番目の入力点となる。以下同様にして逐次 $|\gamma_k|$ が最大となる入力点を追加し、複数個の入力点が求められる。従って、複数個の入力点がある場合、パターンマッチング法によって入力点によるベクトルを追加することにより逐次入力電流位置を求めることが可能である。しかし、このようにして入力電流を追加した場合、電流の分布が相似形であれば、それらが測定点に与えるフィールドパターンは同一パターンとなり、結果として形状は求められても大きさは一意的に求められないことに注意しなければならない。これは円形断面を持つ導体は、半径に無関係に同じパターンを周辺に与えることから明らかである。

#### (b) 不均一電流分布

導体が均一の媒質でない場合や表皮効果(時間変化のある系である瞬間の電流分布と磁界分布を想定)のために、導体断面に不均一な電流が分布している場合である。この問題に、前述の均一電流分布を前提とするパターンマッチング法を適用し入力電流を求めると、電流密度の大きさが入力点の集中度合で表されることとなる。すなわち、入力点が集中する部分は電流密度が高く、分散する部分は電流密度が低いものとして表される。

#### 2.4.3. 三次元問題

三次元の電流成分には第3(a)図に示すようにx軸方向の成分を含むものと第3(b)図に示すようにy軸方向の成分を含むものがある。いまy軸上の測定点でy-z平面に法線方向の磁界 $H_{n\alpha}$ と $H_{n\beta}$ を考えたとき、いずれの磁界もx-y平面に垂直なz方向に電流の方向が一致したときそれらの大きさは最大となる。これは、三次元問題に局部的に二次元のモデルを適用した場合、得られる結果は二次元モデルに最も適合する成分を主として抽出することを意味する。従って、三次元空間を互いに直交する方向に二次元モデルに分解し、各部分に二次元モデルを適用して得られた結果を組み合わせることで三次元問題の電流分布を評価することができる。

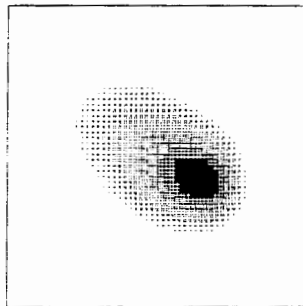


第3図. 三次元問題.

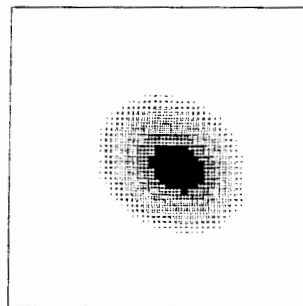
### 3. 実験

#### 3. 1. 全周辺データが既知の場合

第4(a)図に示すように5×5cmの正方形枠内に、ある電流が不均一に分布して流れているとする。この電流を取り囲む第4(a)図の外枠全周に沿って、外枠の法線方向の磁界が上下左右各々55点、合計220点について与えられたとする。この220点の測定値から内枠の内部を55×55=3025点の入力点が存在するモデルを考える。すなわち未知数が3025点で式の数が220である。第4(b)図にパターンマッチング法によって解いた結果を示す。第4(b)図は、第4入力点の $|\gamma_k| \geq 0.98$ の部分によって得られたものである。第4(b)図の結果から、対象物の全周辺データが与えられた場合、比較的良好に電流分布が求められることがわかる。



(a) 正解

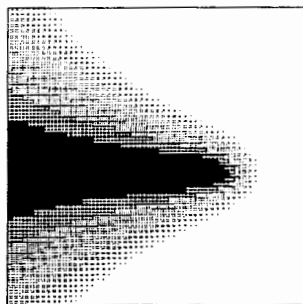


(b) 第4入力点までのパターン

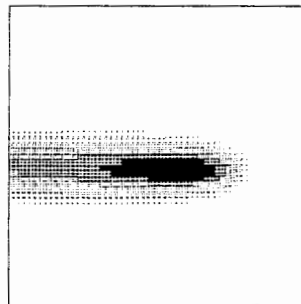
第4図. 対象物の全周辺データが与えられた場合の電流分布推定.

#### 3. 2. 一側面のデータが既知の場合

第4(a)図の電流分布を右側面の55点の法線方向磁界から推定する問題を考える。第5(a)図に、第4入力点までの $|\gamma_k|$ が0.98以上の分布によって得られた推定結果を示す。この場合、第4(b)図と同様な単純な入力点の追加パターンでは、明確な表現が出来ない。第5(b)図に、第5番目までの入力点で、 $|\gamma_k|$ が0.98以上の分布の平均値によって得られた電流分布推定結果を示す。このように一側面データからの推定はデータ数が少ないため第4図の結果に比較して劣る結果となる。特に、第4(a)図と第5(b)図を比較すると、電流分布の下方部は求められるが上方部は求められない。また、下方部の左右端部に存在しない電流分布が現れる。



(a) 第4入力点までのパターン

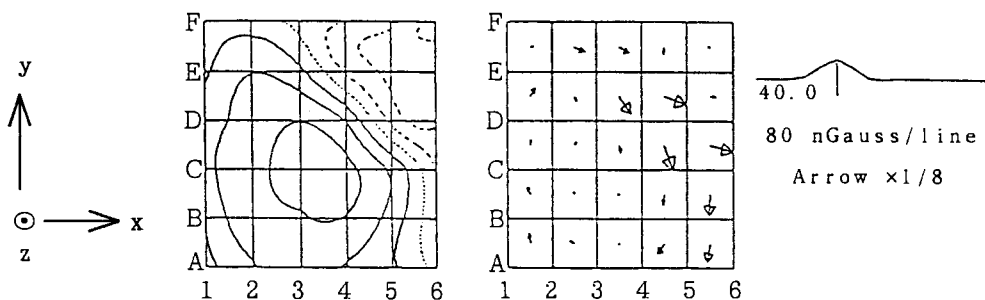


(b) 第5入力点までの平均値によるパターン

第5図. 右側面データからの電流分布推定.

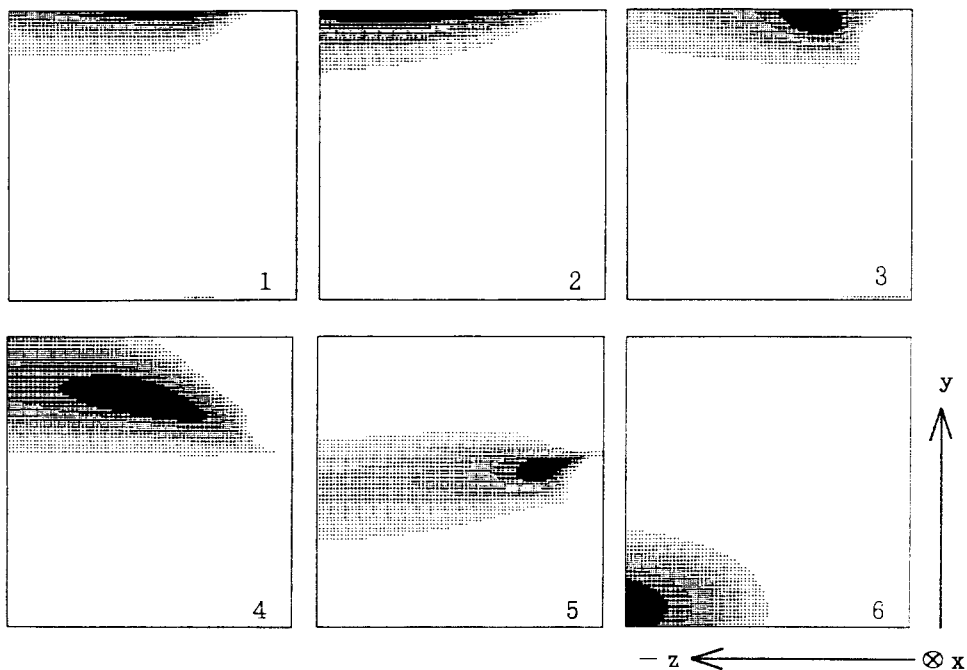
### 3. 3. 三次元問題 (心磁図)

第6 (a) 図は脈がピーク時における心臓直上部分の法線方向磁界を体表面から測定したものであり、いわゆる心磁図とよばれる。[9] また、第6 (b) 図はベクトルアローマップと呼ばれる図であるが、これは測定磁界のrotation演算を行って電流密度の分布を描いたものである。第6 (a) 図から、 $y-z$  平面に垂直な  $x$ -軸方向の電流分布を推定した結果が第6 (c) 図、 $x-z$  平面に垂直な  $y$ -軸方向の電流分布を推定した結果が第6 (d) 図に示してある。尚、 $x, y, z$ -軸それぞれの問題領域は  $5 \times 5 \times 5 [\text{cm}^3]$  の立方体とし、 $y-z$  平面、 $x-z$  平面それぞれ  $80 \times 80 = 6400$  入力点とした。また、測定点は  $x-y$  平面を  $1\text{cm}$  間隔としたものであり、全体で  $6 \times 6 = 36$  点である。さらに、データの処理は第5入力点までの  $|\gamma_k|$  が  $0.95$  以上の分布の平均値で行った。第6 (c) 図から、 $x$ -軸方向の電流は心臓の左方部 (第1, 2面) では上側の中央部に分布し、右方部 (第6面) になると中心から下側の深部に分布していることがわかる。



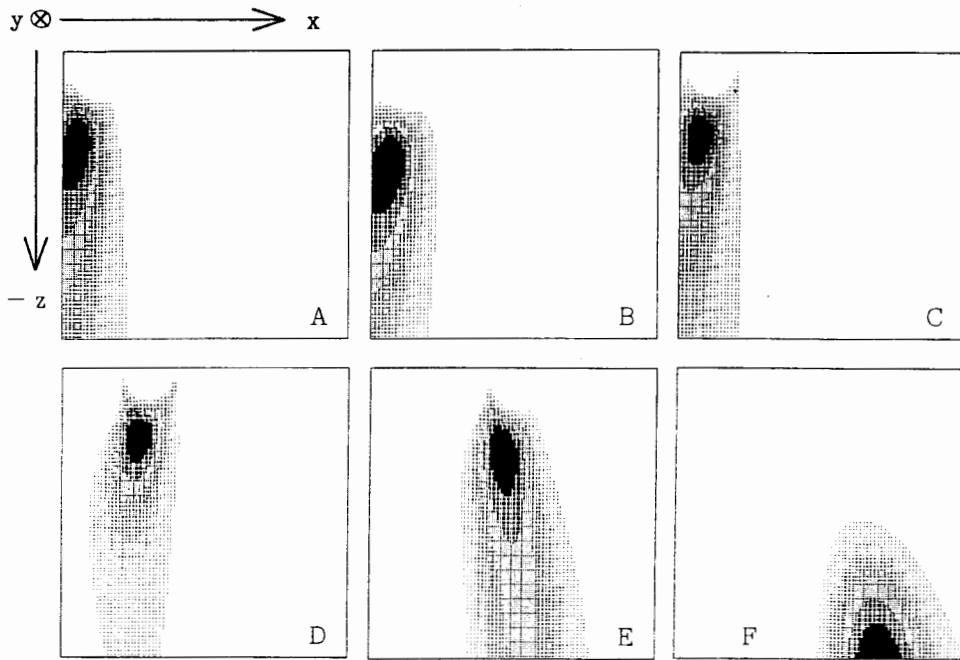
(a) 心磁図

(b) ベクトルアローマップ



(c)  $x$ -軸方向の電流分布





(d) y-軸方向の電流分布

第6図. 心磁図と心臓中の電流分布推定結果。

他方、第6(d)図から、y-軸方向の電流は心臓の下方部(第A, B面)では左側の浅深部に分布し、上方部(第F面)になると右側深部に分布していることがわかる。この様に、パターンマッチング法は第6(b)図のベクトルアローマップから得られない情報を提供することができる。しかし、電流の大きさそのものは、局所的な二次元モデルであるため評価できない。

#### 4. まとめ

本稿では、磁界分布の測定値から電流分布を推定する方法について検討した。その結果、電磁界源の位置推定は対象物の全周辺磁界分布を測定しなければ良好な結果は期待できないことが判明した。一側面からのデータによる電流分布の推定は、ある特定な部分のみ推定可能であることがわかった。また、三次元問題を局所的に二次元モデルに分解することによってある程度解くことが可能であることが示された。

#### 参考文献

- [1] Y. Saito, et al, J. Appl. Phys. 63(8), 15 April 1988.
- [2] Y. Saito, et al, IEEE Trans. MAG-24, No.6, Nov. 1988.
- [3] S. Hayano, et al, J. Appl. Phys. in printing.
- [4] K. Atsumi, Ed., 'Biomagnetism', 87(Tokyo Denki Univ. Press, Japan)1988.
- [5] 板垣 他, 電気学会マグネティクス研究会資料 MAG-89-163.
- [6] Y. Saito, et al, J. Appl. Phys., 67(9), 1 May 1990.
- [7] 斎藤 他, 日本ソリッドイオン学会 第11回計算電気・電子工学の発展, 1990年3月.
- [8] K. Watanabe, and et al, 'Biomagnetism', 87, pp. 346-349 (Tokyo Denki Univ. Press, Japan)

原稿受付日	平成3年1月16日
-------	-----------