

## 磁化特性のモデリング

## Modeling of Magnetization Characteristics

## その3. 新Chua型モデルの応用

齊藤兆古, 奥野一巳, 早野誠治, 福島一弘  
Y.Saito K.Okuno S.Hayano K.Fukushima

法政大学 工学部

College of Engineering, Hosei University

## 1. まえがき

磁性材料の磁化特性を如何にして設計に導入するかは、設計結果の妥当性を支配する極めて重要な段階である。しかしながら、磁性材料の磁化特性を数式的に表現することは極めて困難な問題と考えられていた。従って、従来は定常状態から過渡状態さらに損失などのすべてを表わし得る磁化特性モデルなど存在せず、多くはスタインメッツ型の実験式が設計に使用されていた。

筆者等は、L.O.Chua等によって開発された汎用電子回路解析プログラムのための非線形インダクターモデルを一般化し、磁気装置の磁界解析やパワーエレクトロニクス回路への応用などを行なった〔1-9〕。その結果、Chua型モデルは定常状態から過渡状態まで広汎に磁化特性を表現することが立証され、またPreisach型モデルとの関係も明らかにし、より洗練された新Chua型モデルの提唱となった〔10-12〕。

本稿は筆者等が提唱している新Chua型モデルを定常状態の特性、損失さらに過渡状態の特性について、その妥当性を吟味するものである。

## 2. 新Chua型モデルの応用

## 2.1 新Chua型モデル

磁化特性は大きく分けて、磁気飽和特性と磁気ヒステリシス特性がある。磁気飽和特性は、過去の磁化履歴を交流で打ち消して得られる理想磁化曲線で表わされるものとする。すなわち、次式で与えられる。

$$H = \frac{1}{\mu} B . \quad (1)$$

ここで、 $H$ 、 $B$ 、 $\mu$  はそれぞれ磁界、磁束密度および透磁率である。さらに、過去の

磁気履歴に関係しない可逆的な磁化特性を表すパラメータとして可逆透磁率が知られている。可逆的な磁化過程は、 $\Delta H$ 、 $\Delta B$ をそれぞれ微小磁界変分、微小磁束密度変分として次式で表わされる。

$$\Delta H = \frac{1}{\mu_r} \Delta B \quad (2)$$

ここで、 $\mu_r$  は可逆透磁率である。(2)式を書き直すと、

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\mu_r} \frac{dB}{dt} \quad (3)$$

の時間で微分した形にも書ける。(1)式による磁界と(3)式による磁界の和が全体の磁界を表わすとすれば、

$$H + \frac{\mu_r dH}{s dt} = \frac{1}{\mu} B + \frac{dB}{s dt} \quad (4)$$

の関係が得られる。ここで、 $s$ はヒステリシス係数と呼ばれるパラメータで、 $[\Omega/m]$ の次元を持ち、(1)式と(3)式の次元を一致させるために導入されている[11, 12]。(4)式の微分方程式の解が磁気履歴を呈示するならば、結果として、(4)式は磁気飽和を表すパラメータで構成されているから、磁化特性を表すモデルと考えられる。

パラメータを一定値とした線形計算の結果は、(4)式がRayleighの関係等を満足し、磁気ヒステリシスを呈示することを示している[11, 12]。(4)式は従来のChua型モデルに可逆透磁率を加えたものであることから、新Chua型モデルと称せられる。

## 2.2 パラメータ決定

(4)式の新Chua型モデルのパラメータは、透磁率 $\mu$ 、可逆透磁率 $\mu_r$ 、ヒステリシス係数 $s$ からなる。(4)式は結果として磁気履歴を呈示するのであるから、(4)式を構成するパラメータが履歴に依存してはならない。

従って、透磁率 $\mu$ は、(1)式の理想磁化曲線から決定される。理想磁化曲線と周期的磁化状態(正のピークと負のピークが一致した状態)のヒステリシスループの関係は、Bozorthによって指摘されている[13]。この関係によると、理想磁化曲線は、周期的磁化状態のヒステリシスループにおいて、同一磁束密度に対応する上昇および下降曲線上のそれぞれの磁界の平均値となる点をトレースした曲線とよく一致する。また、磁束密度が正弦波状に時間に対して変化しているとき、周期的磁化状態の一連のヒステリシスループ群の頂点をトレースして得られる正規磁化曲線はBozorthの関係によって得られる曲線と一致することも報告されている[14]。

さらに、磁気飽和の著しい高磁束密度の領域では、ヒステリシスループの頂点で、(4)式の磁束密度と磁界の時間微分の項( $dB/dt$ と $dH/dt$ )が同時に零となるから、残りの項 $H$ と $(1/\mu)B$ から理想磁化曲線を得ることができる。

これらの関係から、本稿では、低磁束密度領域の理想磁化曲線をBozorthの関係から測定し、高磁束密度領域の理想磁化曲線を周期的磁化状態のヒステリシスループ群の頂点から測定した。これは、低磁束密度領域においては正弦波状に時間に対して変化する磁束密度が保持しやすいことと、高磁束密度領域では、波形に依存せずに(4)式で $dB/dt=0$ と $dH/dt=0$ の条件がヒステリシスループの頂点で成り立つことに基づく。

ある一定のバイアス磁束密度状態で、微小交流磁界を加えることで、可逆透磁率 $\mu_r$ は測定される。Gansは可逆透磁率はバイアス磁束密度の1価関数で表わされる(これをGansの法則と呼ぶ)ことを報告したが、BozorthはGansの法則にあてはまらない磁性材料も存在することを報告した[15]。これは、バイアス磁束密度まで磁化するための磁気履歴に可逆透磁率が依存するためであろう。従って、バイアス磁束密度が理想磁化曲線と与えられるとすれば、Gansの法則は厳密に成り立つと考えられる。すなわち、直流磁界と交流磁界を重ねて磁化し、交流磁界を磁束の飽和値に達する充分大きな値から徐々に減少することで得られる可逆透磁率は直流磁界によって決まるバイアス磁束密度の1価関数となる。これはバイアス磁束密度の磁気履歴が飽和値まで達する充分大きな交流磁界によって打ち消されるためである。可逆透磁率の特別な場合として、バイアス磁束密度が零のとき、可逆透磁率 $\mu_r$ は初期透磁率 $\mu_i$ と一致する。

本稿では、初期透磁率を測定し、この初期透磁率を最大値とする磁束密度の1価関数として表わした。この可逆透磁率の関数は磁束密度Bに対して(1)式または(4)式の透磁率 $\mu$ と同様の変化をするものとした。これは、理想磁化曲線から決まる透磁率 $\mu$ が零磁束密度で最大値となる事実、および、可逆透磁率は磁束密度の増加に対して減少する傾向を持つ実験的事実に基づいて仮定された[15]。

磁束密度が時間に対して正弦波状に変化している場合、磁束密度が負の値から零に達した瞬間、磁束密度の時間微分 $dB/dt$ は最大値を取る。(4)式から、 $B=0$ とし、 $dB/dt$ とHの比を求めると、

$$s + \frac{\mu_r dH}{H dt} = \frac{1 dB}{H dt} \quad (5)$$

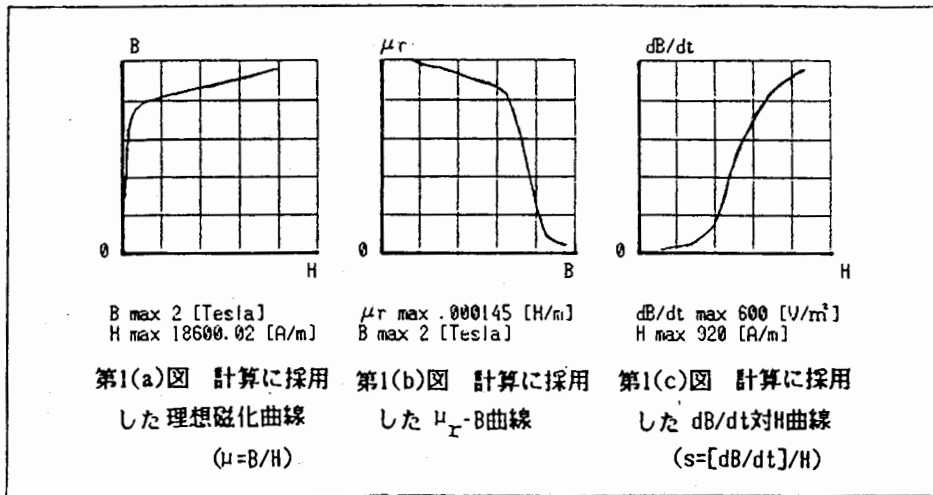
の関係を得る。こときの $\mu_r$ は磁束密度Bが零であるために初期透磁率 $\mu_i$ に等しく、可逆透磁率 $\mu_r$ は磁束密度Bの1価関数と仮定しているから、一定値と仮定できる。

磁界Hと磁束密度の時間微分 $dB/dt$ をそれぞれ横軸と縦軸に取り、 $dB/dt$ の大きさを変えて、 $dB/dt$ 対Hループ群を描き、その頂点をトレースして得られる曲線の傾きは(5)式の左辺と一致する。周波数を変化して同様の曲線を測定すると、曲線の傾きはほぼ周波数に比例して大きくなる。この傾向は、フェライトなどの初期透磁率の大きな材料程顕著に表われる。これは、周波数が高くなる程、同一 $dB/dt$ に対してHが小さくなることに起因すると考えられる。

本稿では、特定周波数(50Hz)の電源を用いて、(5)式の左辺に対応する曲線を測定し、この曲線と初期透磁率および透磁率 $\mu$ を用いて計算機実験を反復し、磁気ヒステリシス係数を決定した。

第1(a),(b),(c)図にそれぞれ計算例で採用した、透磁率 $\mu$ を与える理想磁化特性、可逆

透磁率  $\mu_r$  の特性および磁気ヒステリシス係数  $s [= (dB/dt)/H]$  を与える  $dB/dt$  対  $H$  特性を示す。なお、供試リアクトルは内径 8cm, 外径 10cm, 厚み 1cm の軟鉄板を積層したトロイダルコアで作られている。



### 2.3 定常状態の磁化特性

(4) 式は磁化特性を表わす微分形のモデルである。従って、(4) 式の微分方程式が適当な初期条件と入力に対して解かれたとき、初期条件と入力に応じた磁化特性を再現する。(4) 式を構成するパラメータである透磁率  $\mu$  と可逆透磁率  $\mu_r$  は磁束密度  $B$  の 1 価関数であり、磁気ヒステリシス係数  $s$  は磁束密度の時間微分  $dB/dt$  の 1 価関数である。

このため、任意の入力に対して (4) 式から定常状態の応答を得ることは極めて困難となる。よって、本稿では、(4) 式から定常状態の応答を得ることよりも (4) 式の妥当性を定常状態の特性から吟味することを目的として定常状態の磁化特性を再現した。

いま、磁束密度  $B$ 、磁束密度の時間微分  $dB/dt$  が与えられたとすれば、(4) 式のパラメータ  $\mu$ 、 $\mu_r$ 、 $s$  はそれぞれ

$$\mu = f_{\mu}(B), \quad (6)$$

$$\mu_r = f_r(B), \quad (7)$$

$$s = f_s\left(\frac{dB}{dt}\right), \quad (8)$$

として決定される。ここで、記号  $f(*)$  は  $*$  の 1 価関数であることを示す。

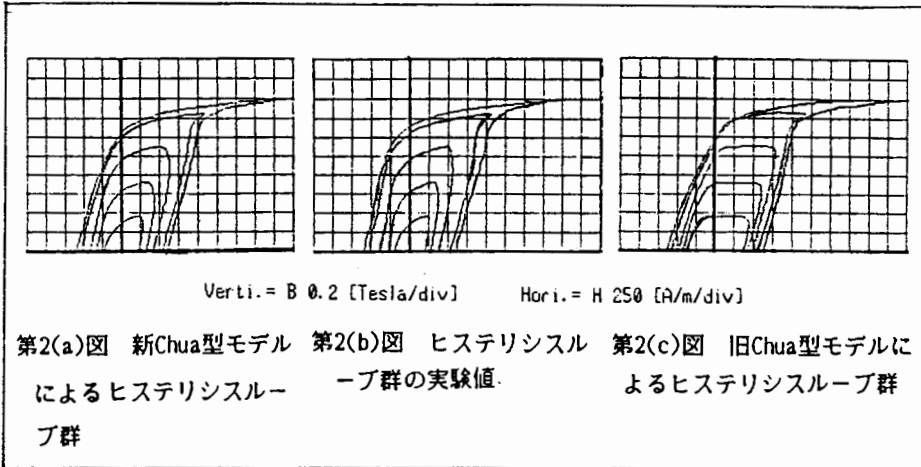
(6) ~ (8) 式を (4) 式に代入すれば、

$$H + \frac{f_r(B)}{f_s(dB/dt)} \frac{dH}{dt} = \frac{1}{f_{\mu}(B)} B + \frac{1}{f_s(dB/dt)} \frac{dB}{dt}, \quad (9)$$

を得る。(9)式から  $\Delta t$  秒後の磁界  $H_{t+\Delta t}$  を求めるために次式のように変形する。

$$H_{t+\Delta t} - H_t = \int_t^{t+\Delta t} \frac{f_s(dB/dt)}{f_r(B)} \left\{ \frac{1}{f_\mu(B)} B + \frac{1}{f_s(dB/dt)} \frac{dB}{dt} - H \right\} dt. \quad (10)$$

ここで、 $H_t$  は時間  $t$  における磁界の強さである。(10)式から  $B, dB/dt, H_t$  を与えて数値積分し、 $H_{t+\Delta t}$  を算出した。以上の過程は、 $B$  と  $dB/dt$  および  $H_t$  が与えられるから、パラメータ  $\mu, \mu_r, s$  が(6)~(7)式によって決定され、磁界  $H_{t+\Delta t}$  を未知数として求めている。従って、(10)式から算出された  $H_{t+\Delta t}$  とその実測値との比較が(9)式の妥当性の評価基準となる。



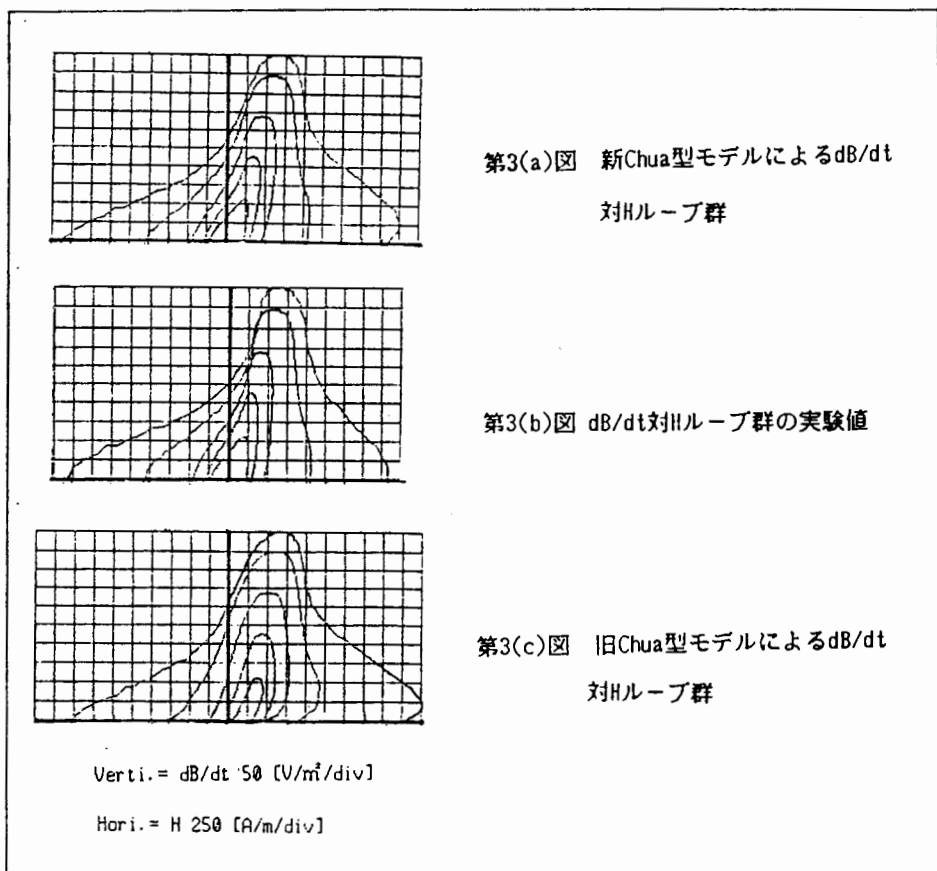
第2(a)図に、横軸を(10)式から算出された磁界  $H$  に取り、縦軸を実測値の磁束密度  $B$  に取って描いた一連のヒステリシスループ群を示す。第2(b)図に、第2(a)図に対応する実験値によるヒステリシスループ群を示す。従来のChua型モデルは、(4)式で可逆透磁率  $\mu_r$  を零としたものと一致する。従って、従来のChua型モデルにおける磁界  $H$  は、磁束密度  $B$  と 磁束密度の時間微分  $dB/dt$  が与えられたとき、

$$H = \frac{1}{f_\mu(B)} B + \frac{1}{f_s(dB/dt)} \frac{dB}{dt}, \quad (11)$$

となる。(11)式による旧Chua型モデルの磁界  $H$  と実測値の磁束密度  $B$  によるヒステリシスループ群を第2(c)図に示す。

第2(a)~2(c)図から、旧Chua型モデルは磁束密度が高く、磁気飽和の支配する領域で十分な再現性を有する。しかし、低磁束密度領域における旧Chua型モデルの再現性は不十分である。これに比較して、新Chua型モデルは、低磁束密度から高磁束密度の範囲まで、比較的良好な再現性を有することがわかる。

第3(a)図に、(10)式から算定された磁界Hを横に取り、実測値の磁束密度の時間微分 dB/dtを縦軸に取ったdB/dt対Hループ群を示す。第3(b)図と第3(c)図に、第3(a)図に対応する実験値と旧Chua型モデルによるdB/dt対Hループ群を示す。



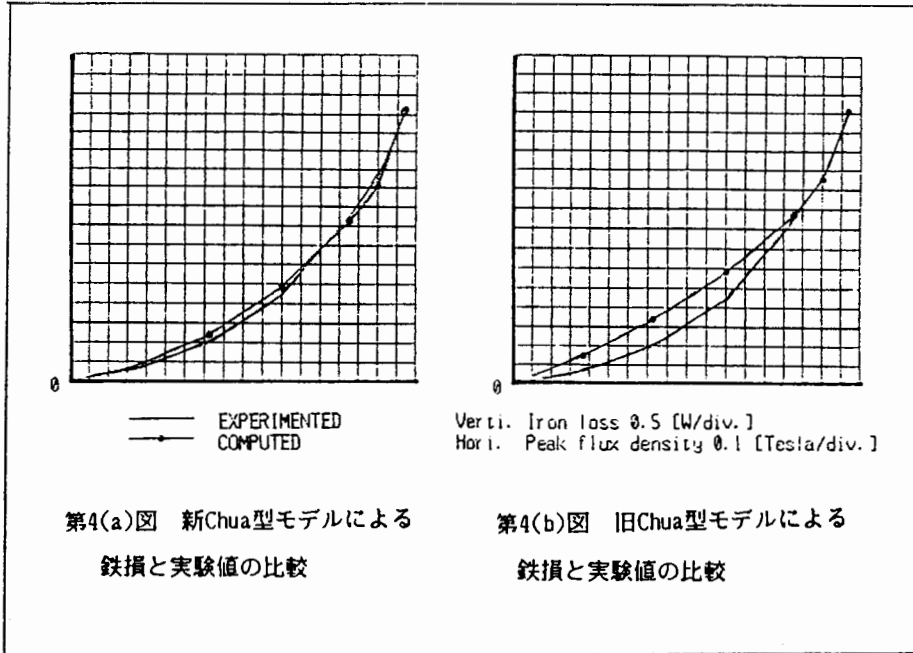
第3(a)~3(c)図に示されているdB/dt対Hループ群の頂点をトレースした曲線の傾きは、(5)式の左辺に対応する。従って、第3(a)~3(c)図は磁気ヒステリシス係数sを与える第1(c)図の基本データとなる曲線群である。第3(a)~3(c)図から、旧Chua型モデルは磁束密度の時間微分dB/dtが大きい領域で十分な再現性を有する。

しかし、dB/dtが小さい領域における旧Chua型モデルの再現性は不十分である。これに対し、新Chua型モデルは全体的に良好な再現性を有することがわかる。

定常状態の磁化特性評価として重要な判断基準の中に鉄損がある。この鉄損はヒステリシスループの面積に対応する量で、次式によって計算される。

$$W_i = \int_0^T H \cdot \left( \frac{dB}{dt} \right) dt \quad (12)$$

ここで、 $T$ は1周期に要する時間である。(12)式の磁界 $H$ として(10)式から計算される磁界を代入し、磁束密度の時間微分 $dB/dt$ に実測値を代入して計算される鉄損 $W_i$ と実験値の鉄損を比較した図を第4(a)図に示す。同様に、(12)式の磁界 $H$ として(11)式の旧Chua型モデルの磁界を代入し、磁束密度の時間微分として実測値を代入して得られる鉄損と、実験値を比較した図を第4(b)図に示す。



第4(a)図から、新Chua型モデルによる鉄損の計算値は、低磁束密度から高磁束密度の領域まで広い範囲で良好な精度を発揮する。しかしながら、第4(b)図から、旧Chua型モデルは、高磁束密度の領域でのみ良好な精度を持つことがわかる。第4(a)と4(b)図は、それぞれ(10)式と(11)式の磁界を1周期について評価することに対応する。従って、第2(a)と第2(c)図のヒステリシスループ群に対する評価と第4(a)と第4(b)図はよく一致している。

#### 2.4 過渡状態の磁化特性

いま、供試トロイダルリアクトルのコイル巻数を $n$ 、コイルの抵抗を $r$ 、断面積を $A$ さらに平均磁路長を $l$ とし、(4)式の両辺を磁路長 $l$ について積分すると、次式のような関係を得る。

$$\int_0^l H d\ell + \int_0^l \frac{\mu_r dH}{s} d\ell = ni + n \frac{\mu_r di}{s} \quad (13)$$

$$V + \frac{M_n}{s} \frac{dv}{dt} = m \frac{M_n}{s} \dot{\lambda} + \left(m + \frac{1}{R_i} \frac{r}{m}\right) \dot{\phi} + \frac{r}{m L_i} \phi$$

$$\frac{V + \frac{M_n}{s} \frac{dv}{dt} - \frac{M_n}{s} \ddot{\lambda} - \dot{\lambda}}{r} = \frac{\dot{\lambda}}{s} + \frac{\dot{\lambda}}{L} = \frac{M_n}{s} \ddot{\lambda} + \left(1 + \frac{r}{R_i m^2}\right) \dot{\lambda} + \frac{r}{m^2 L_i} \lambda$$

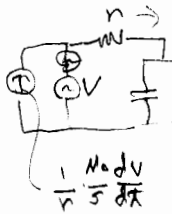
$$\int_0^{\ell} \frac{1}{\mu} B d\ell + \int_0^{\ell} \frac{1}{s} \frac{dB}{dt} d\ell = \frac{\ell}{\mu A} \phi + \frac{\ell}{s A} \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{V + \frac{M_n}{s} \frac{dv}{dt} - \dot{\lambda}}{r} = \frac{1}{r} \frac{M_n}{s} \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}}{s} + \frac{\dot{\lambda}}{L_i} \phi + \frac{1}{R_i} \frac{d\phi}{dt} \quad (14)$$

ここで、 $i$ 、 $\phi$ 、 $L_i$ 、 $R_i$  はそれぞれコイルの電流、磁束、コイル1巻当りのインダクタンス、コイル1巻当りの等価鉄損抵抗である。印加電圧を  $v$  とすれば、電流  $i$  とその時間微分  $di/dt$  は、

$$\frac{1}{r} \frac{M_n}{s} \frac{dv}{dt} + \frac{v - \dot{\lambda}}{r} = \frac{M_n}{r s} \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}}{s} + \frac{\dot{\lambda}}{L} \quad (15)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{r} \left( \frac{dv}{dt} - n \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right) \quad (16)$$



与えられる。(15)式と(16)式を(13)式に代入すると、(13)式と(14)式は等しいから、次の関係が得られる。

$$\frac{n}{r} \left( v + \frac{\mu r}{s} \frac{dv}{dt} \right) = \frac{n^2 \mu r}{r s} \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \left( \frac{n^2}{r} + \frac{1}{R_i} \right) \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L_i} \phi \quad (17)$$

(17)式は、トロイダルリアクトルに電圧  $v$  が印加されたときの磁束  $\phi$  に関する微分方程式であり、(17)式から磁束  $\phi$  が求まったとき、電流  $i$  は(13)式と(14)式から得られる電流  $i$  に関する次の微分方程式

$$\frac{1}{n L_i} \phi + \frac{1}{n R_i} \frac{d\phi}{dt} = i + \frac{\mu r}{s} \frac{di}{dt} \quad (18)$$

の解として得られる。また、(13)式と(14)式の透磁率  $\mu$  や可逆透磁率  $\mu_r$  および磁気ヒステリシス係数  $s$  は(6)式、(7)式、(8)式で示されているように磁束密度  $B$  や磁束密度の時間微分  $dB/dt$  の関数であるため、(17)式は非線形な微分方程式となる。このため、(17)式は一般に数値的方法で解かれる。

第5(a)図に、コイル巻数  $n=900$  ターン、コイルの抵抗  $r=6.3[\Omega]$ 、コア断面積  $A=1 \times 10^{-4} [m^2]$ 、平均磁路長  $\ell=0.283[m]$  のトロイダルリアクトルに  $v=\sqrt{2} 19 \sin(100\pi t - 21.4^\circ)$  の電圧を磁束と電流の初期値を零として印加した場合の過渡現象を(17)式と(18)式を用いて計算した例を示す。第5(b)と第5(c)図にそれぞれ、第5(a)図に対応する実験値と旧Chua型モデルによる計算値を示す。

第5(a)~第5(c)図から、新Chua型および旧Chua型どちらのモデルも磁束の最大値は実験値よりも大きめの値となっていることがわかる。しかし、電流の最大値は実験値と比較して、新Chua型は大きめの値を生じ、旧Chua型は小さめの値を生ずることが第5(a)~5(c)図により観察される。さらに、高磁束密度領域における磁束の反転はコア材料の磁気飽和によって支配され、新Chua型と旧Chua型で大きな差異は見られないが、低磁束密度領域に



$$\frac{v - \dot{\lambda}}{r} = \frac{\dot{\lambda}}{R} + \frac{\dot{\lambda}}{L}$$

-76-

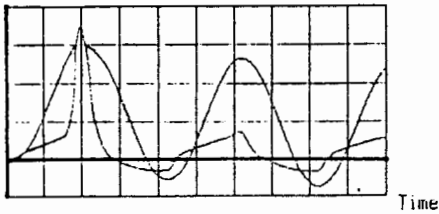
$$\frac{\mu}{r} (v) = \left( \frac{n^2}{r} + \frac{1}{R_i} \right) \dot{\phi} + \frac{1}{L_i} \phi$$

$$v = \left( m + \frac{r}{R_i m} \right) \dot{\phi} + \frac{r}{L_i m} \phi$$

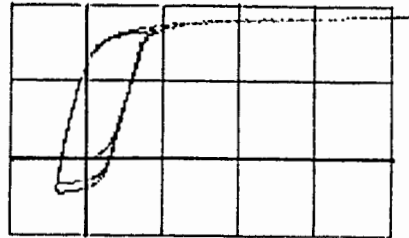
$$\frac{v - m \dot{\phi}}{r} = \frac{\dot{\phi}}{R_i m} + \frac{\phi}{L_i m}$$



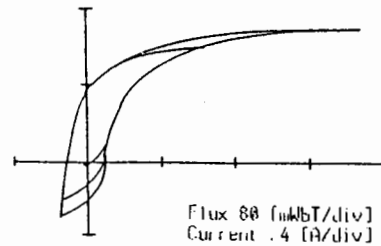
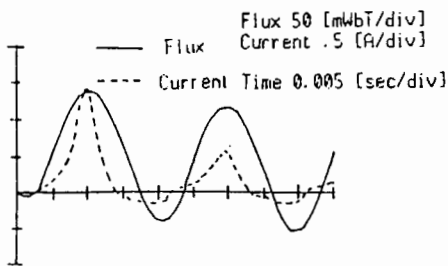
Flux 50 [mWbT/div]  
Current .5 [A/div]  
Flux & Current Time 0.005 [sec/div]



Flux 80 [mWbT/div]  
Current .4 [A/div]

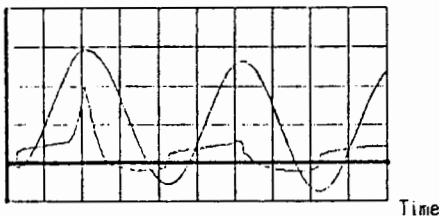


第5(a)図 正弦波電圧印加時の過渡ヒステリシスループと磁束と電流の時間方向に対する変化(新Chua型モデルによる計算値)

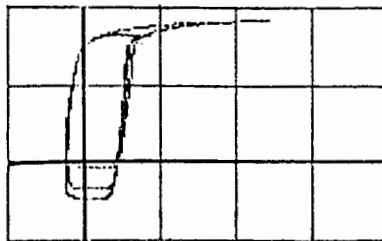


第5(b)図 正弦波電圧印加時の過渡ヒステリシスループと磁束と電流の時間方向に対する変化(実験値)

Flux 50 [mWbT/div]  
Current .5 [A/div]  
Flux & Current Time 0.005 [sec/div]



Flux 80 [mWbT/div]  
Current .4 [A/div]



第5(c)図 正弦波電圧印加時の過渡ヒステリシスループと磁束および電流の時間方向に対する変化(旧Chua型モデルによる計算値)

おける磁束の反転は新Chua型の方が旧Chua型に比較して実験値の傾向をよく再現することも第5(a)・5(c)図の結果から判定される。

### 3. 結言

本稿では、筆者等の提唱する新Chua型モデルについて、パラメータの決定法や定常状態特性さらに過渡状態特性について具体的な例について検討した。その結果、新Chua型モデルは旧Chua型モデルに比較して、比較的良好な磁化特性の再現性を有し、特に低磁束密度領域におけるモデルの妥当性は極めて高いと考えられる。

#### 参考文献

- [1] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, Vol.MAG-18, No.2, March 1982 pp.546-551.
- [2] Y.Saito and et al, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., Vol.38, No.2, June 1983 pp.182-202.
- [3] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, Vol.MAG-19, No.5, September 1983 pp.2189-2191.
- [4] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, Vol.MAG-19, No.6, November 1983 pp.2510-2513.
- [5] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, Vol.MAG-20, No.5, September 1984 pp.1434-1436.
- [6] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, Vol.MAG-20, No.5, September 1984 pp.1965-1967.
- [7] Y.Saito and et al, Comp.Meth.Appl.Mech.Eng., Vol.49, No.1, May 1985 pp.109-119.
- [8] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, Vol.MAG-21, No.6, November 1985 PP.2280-2283.
- [9] Y.Saito and et al, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 54-57, 1986 pp.1613-1614.
- [10] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, September 1986 in printing.
- [11] 齊藤 他, 磁化特性のモデリング(その1. Chua型モデルとPreisach型モデルの検討), 電気学会マグネティックス研究会資料, 昭和61年10月 岩手.
- [12] 齊藤 他, 磁化特性のモデリング(その2. 新Chua型モデルとその基本特性), 電気学会マグネティックス研究会資料, 昭和61年10月 岩手.
- [13] R.M.Bozorth, (Ferromagnetism, Van.Nostrand Company, INC., 1951)PP.8.
- [14] 齊藤 他, 電気学会マグネティックス研究会資料 No.MAG-85-64.
- [15] R.M.Bozorth, (Ferromagnetism, Van.Nostrand Company, INC., 1951)PP.543-546.