

Voronoi-Delaunay の離散化法による電磁界計算 ——その1 三次元静的問題——

齊藤兆古，木住野泰光，早野誠治，福島一弘
(法 政 大 学)

1986年8月29日

社団法人 電 気 学 会

東京都千代田区有楽町1-12-1

Voronoi-Delaunayの離散化法による電磁界計算

その1. 三次元静的問題

Electromagnetic Fields Calculation using Voronoi-Delaunay Discretization

斉藤兆古、木住野泰光、早野誠治、福島一弘
Y. Saito, Y. Kishino, S. Hayano, K. Fukushima

法政大学 工学部
College of Engineering, Hosei University

1. まえがき

筆者等は、Voronoi-Delaunayの離散化法による電磁界の数値解析法を提唱し、二次元問題において従来の有限要素法と比較して圧倒的に高速で高精度の解を得ることに成功した[1-4]。本稿ではこのVoronoi-Delaunayの離散化法を拡張し三次元静的問題への適用を試みる。すなわち三次元空間をVoronoiの多面体で離散化して得られる解（これをComplementaryという）と、Voronoiの多面体と幾何学的に双対となるDelaunayの四面体で三次元空間を離散化して得られる解（これをPrimalという）を組み合わせる高精度の解を得る方法である。本報告で提案する方法は従来の有限要素法と比較して、二次元問題と同様に圧倒的に高速で高精度の解を生じる可能性が判明したので報告する。

2. Voronoiの多面体とDelaunayの四面体

2.1 Voronoiの多面体

ある三次元空間内に粒子が点在している状態を考える。この三次元空間において全ての点を最も近い粒子に割りふると、空間は粒子と同数の凸多面体領域にユニークに離散化される。その多面体領域をVoronoiの多面体（第1(a)図）という[5]。換言すれば、各粒子を中心とする球を想定し、各々の球の表面が接する面からなる多面体がVoronoiの多面体である。

2.2 Delaunayの四面体

Voronoiの多面体の各面が互いに接している粒子を結ぶことによって空間を四面体で離散化することができる。その四面体領域をDelaunayの四面体（第1(b,c)図）という[5]。換言すれば、Delaunayの四面体は、隣接する球の中心を結んで得られる四面体である。

三次元空間はVoronoiの多面体かDelaunayの四面体のどちらかで離散化することができる。どちらか一方で離散化されると他方は自動的に決定される性質を持つ。すなわち、Voronoiの多面体とDelaunayの四面体は互いに幾何学的に双対関係がある[6]。この性質を利用して離散化する方法が筆者等の提唱するVoronoi-Delaunay離散化法である。

3. Voronoi-Delaunay離散化法

3.1 数学的モデル

工学におけるスカラーポテンシャルで表わされる三次元問題の多くは、(1)式のような三次元ポアソン型の偏微分方程式を解くことに帰することが多い。

$$\lambda \nabla^2 \phi = \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\sigma \quad (1)$$

ここで、 ϕ はscalar potential, λ は媒質のパラメータ、および σ はsource densityとする。

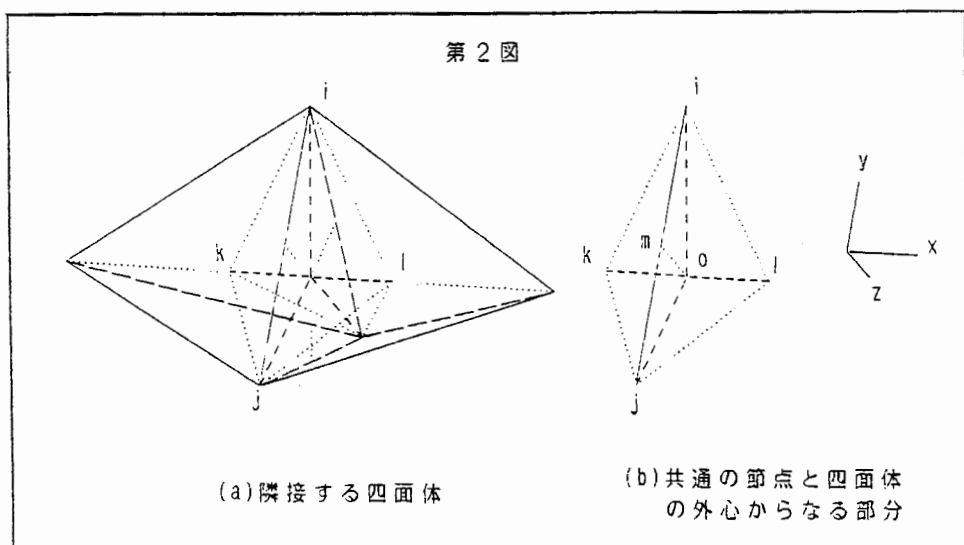
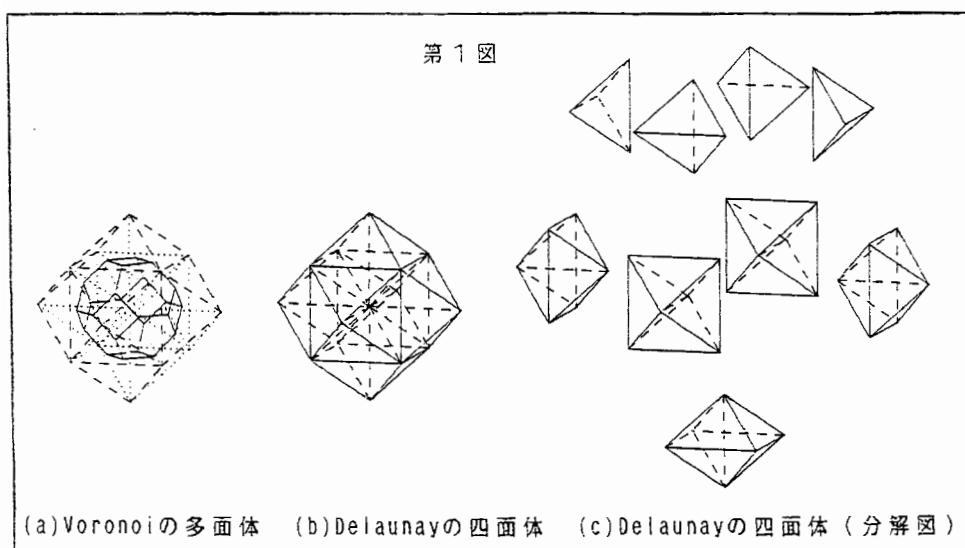
いま、媒質のパラメータ λ が異なる境界を持つ領域IとIIを想定し、領域Iの接する面に垂直方向を n 、平行な方向を t とすれば、両領域I、IIの境界面で、Flux densityが連続の条件

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\text{領域 I}} = \lambda_2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\text{領域 II}}, \quad (2)$$

およびField intensityが共通の条件

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{領域 I}} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\text{領域 II}}, \quad (3)$$

を満たすべき境界条件と仮定する。また、本報告では各々のDelaunayの四面体が個々の λ を持つものとする。



3. 2 部分領域法

ある任意三次元要素の体積を V とし、(1)式をこの要素の体積について積分すると

$$\iiint_V (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) dv = \iint_S \lambda \nabla \phi ds + \iiint_V \sigma dv, \quad (4)$$

を得る。ここで S は体積 V をとり囲む面積である。(4)式は、(1)式に重み関数として単位関数を掛けて体積 V について積分し、重みつき残差を零とおいた部分領域法を意味している。

(a) Delaunay系

第2(b)図で隣接する二つの四面体の共通の節点 i, j と二つの四面体の外心 k, l で囲まれる領域について考えるとすれば、この領域内で節点 i, j は媒質のパラメータが異なる境界上に位置しているから、(3)式を満足する試行関数は次のよう与えられる[1]。

$$\phi_p = \frac{\phi_i + \phi_j}{2} + \frac{\phi_i - \phi_j}{a} y, \quad (5)$$

この試行関数を(4)式に代入して節点 i を囲む領域 V について積分(V を四面体 $i-k-l-m$ の体積、 S を三角形 $k-l-m$ の面積とする。)をすると、第3図から節点 i に対するDelaunay節点方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_1 \frac{S_{p1}}{a} + \lambda_2 \frac{S_{p2}}{a} \right) (\phi_i - \phi_j) \\ &= \frac{1}{2} (V_{p1} \sigma_1 + V_{p2} \sigma_2) \end{aligned} \quad (6)$$

但し記号は以下に示すものとする。

長さ

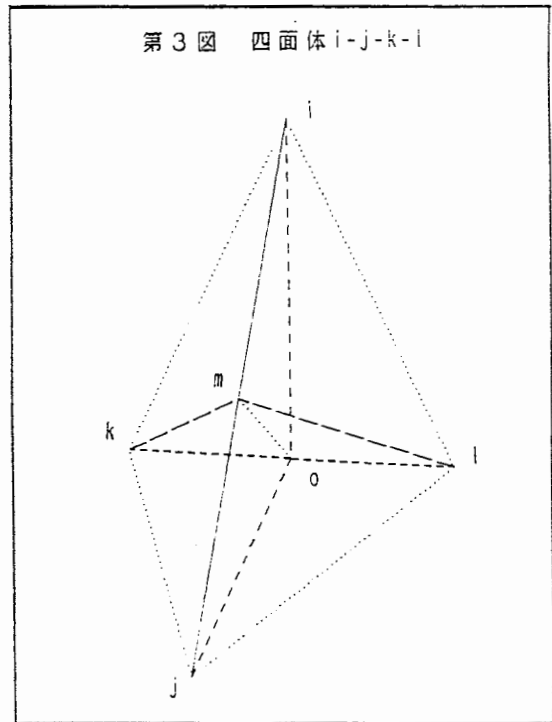
a	i-j
b	k-o
c	l-o
d	m-o

面積

S_{p1}	k-m-o
S_{p2}	l-m-o
S_c	i-j-o

体積

V_{p1}	i-k-m-o, j-k-m-o
V_{p2}	i-l-m-o, j-l-m-o
V_{c1}	i-j-k-o
V_{c2}	i-j-l-o



(b) Voronoi系

問題領域はDelaunay系の定式化のときと同様に四面体*i-j-k-l*とする。この領域内での節点*k, l*はパラメータが異なる境界に垂直に位置しているから、(2)式を満足する試行関数は次のよう与えられる[1]。

$$\phi_c = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} \left[\frac{\lambda_2}{bc} (\phi_l - \phi_k) \times + \frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_l \right] \quad \text{但し、}(x < 0) \quad (7)$$

$$\phi_c = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{b} + \frac{\lambda_2}{c}} \left[\frac{\lambda_1}{bc} (\phi_l - \phi_k) \times + \frac{\lambda_1}{b} \phi_k + \frac{\lambda_2}{c} \phi_l \right] \quad \text{但し、}(x \geq 0) \quad (8)$$

これらの試行関数を(4)式に代入して節点*k*を囲む領域*V*での積分(*V*を四面体*i-j-k-o*の体積、*S*を三角形*i-j-o*の面積とする。)をすると第3図により

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1 \frac{S}{b}} + \frac{1}{\lambda_2 \frac{S}{c}} \right)} (\phi_k - \phi_l) = V_{c1} \sigma_1 \quad (9)$$

の節点*k*に対するVoronoi系の節点方程式が得られる。

3.3 変分原理による定式化

(a) Delaunay系

第2(b)図の四面体*i-j-k-l*の領域内でVoronoi-Delaunayの離散化法においては、*x, y, z*方向が互いに直交するから(1)式を次のように分けられると仮定する。

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{3} \sigma \quad (10)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{1}{3} \sigma \quad (11)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{3} \sigma \quad (12)$$

ここで節点*i, j*間のEnergy Functionalは $\partial \phi / \partial y$ が λ_1 と λ_2 の領域で共通であること、すなわち(3)式が成り立つから、(11)式により

$$F = \frac{1}{2} \iiint \lambda \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dx dy dz - \frac{1}{3} \iiint \sigma \phi dx dy dz \quad (13)$$

と表される。この式は明らかに上限の値を持つPrimal Functionalである[6]。(13)式に(5)式の試行関数を代入して四面体領域*i-j-k-l*について積分を行なうと

$$F = \frac{1}{6} \left[\lambda_1 \left(\frac{bd}{2a} \right) + \lambda_2 \left(\frac{cd}{2a} \right) \right] (\phi_i - \phi_j)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{abd}{6} \sigma_1 + \frac{acd}{6} \sigma_2 \right) (\phi_i + \phi_j), \quad (14)$$

のDelaunay系、すなわちPrimal Functionalが得られる。このFunctionalが極値をとるように ϕ_i を求める、すなわち ϕ_i で偏微分を行なうと次のように節点iに対する節点方程式が得られる。

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_i} = 0$$

$$\left(\lambda_1 \frac{S_{o1}}{a} + \lambda_2 \frac{S_{o2}}{a} \right) (\phi_i - \phi_j) = \frac{1}{2} (V_{p1} \sigma_1 + V_{p2} \sigma_2), \quad (15)$$

このようにEnergy Functionalにより得られた節点方程式(15)式は部分領域法で得られた節点方程式(6)式と当然一致する。

(b) Voronoi系

節点k,l間のEnergy Functionalは $\lambda(\partial\phi/\partial x)$ 両領域で連続となる、すなわち(2)式が成り立つことから、(10)式により

$$G = -\frac{1}{2} \iiint \frac{1}{\lambda} (\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x})^2 dx dy dz + \frac{1}{3} \iiint \sigma \phi dx dy dz, \quad (16)$$

と表される。この式は明らかに下限の値を持つComplementary Functionalである[6]。(16)式に(7),(8)式の試行関数を代入して四面体領域i-j-k-lについて積分を行なうと

$$G = -\frac{1}{6} \frac{ad}{\left(\frac{2b}{\lambda_1} + \frac{2c}{\lambda_2} \right)} (\phi_i - \phi_k)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{abd}{6} \sigma_1 \phi_k + \frac{acd}{6} \sigma_2 \phi_l \right), \quad (17)$$

のVoronoi系すなわちComplementary Functionalが得られる。このFunctionalが極値をとるように ϕ_k を求める、すなわち ϕ_k で偏微分を行なうと次のように節点kにおける節点方程式が得られる。

$$\frac{\partial G}{\partial \phi_k} = 0$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_1 \frac{S_c}{b}} + \frac{1}{\lambda_2 \frac{S_c}{c}} \right)} (\phi_i - \phi_k) = V_{c1} \sigma_1, \quad (18)$$

このようにEnergy Functionalにより得られた節点方程式(18)式は部分領域法で得られた節点方程式(9)式と当然一致する。

(c) Hybrid系

(5)式の試行関数によりDelaunay系又はPrimal系は、隣あう四面体要素間境界で $\partial\phi/\partial t$ が共通である。また(7),(8)式の試行関数によりVoronoi系又はComplementary系は、隣あう四面体要素間で $\lambda(\partial\phi/\partial n)$ が連続である。すなわち、Primal系とComplementary系はそれぞれ互いに相補的に要素間の境界条件を満足していることからこれらを合成したもの(これをHybridと呼ぶ)は高い精度の解が得られると期待できる。

したがって、Hybrid系のEnergy Functionalは

$$H = \frac{1}{2} (F + G) , \quad (19)$$

で与えられる[7]。またHybrid系のPotentialは、二次元の場合と同様にして、Voronoi系とDelaunay系の中間位置、すなわち第2(b)図で*i-k*, *i-l*, *j-k*, *j-l*の中点でそれぞれ

$$\phi_{ik} = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_k) , \quad (20)$$

$$\phi_{il} = \frac{1}{2} (\phi_i + \phi_l) , \quad (21)$$

$$\phi_{jk} = \frac{1}{2} (\phi_j + \phi_k) , \quad (22)$$

$$\phi_{jl} = \frac{1}{2} (\phi_j + \phi_l) , \quad (23)$$

で与えられる。

4. 例題

4. 1 球形キャパシタンス

Voronoi-Delaunay離散化法の収束性を調べるために、例題として球形キャパシタンスの計算を行ない、比較のために四面体の一次要素による有限要素法の計算も行った。

この問題は二次元として計算できるが三次元のVoronoi-Delaunay離散化法の収束性の検討を行なうために三次元問題のままで計算を行なった。しかし球全体で計算すると節点数が多くなるので第4図のように経度と緯度を20度ずつの範囲で計算を行なった。

分割の方法は第4図で半径方向、経度方向、緯度方向を2~5に分けて六面体にし、その六面体を六個の四面体に分割する。

表1にいくつかの分割方法を行なったときの節点数とFunctionalの関係を示し、それらを第5図に図示した。また第6図にFEM, Hybridによるそれぞれの電位分布例を解析解と比較して示した。第5, 6図から明らかにVoronoi-Delaunayの離散化法はFunctionalだけでなくPotentialに対しても極めてよい結果を与えることがわかる。

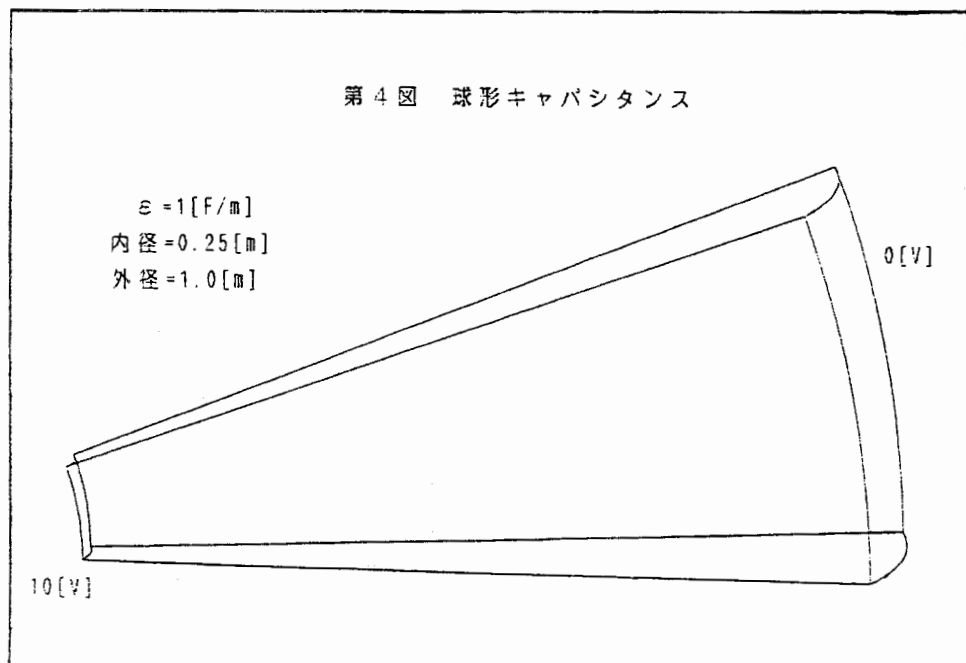
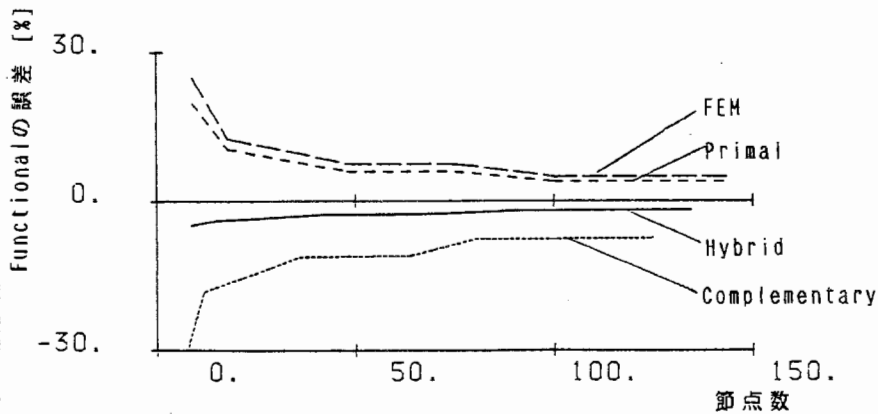


表 1

半径方向	分割数 緯度、経度方向		節点数	func. [J]	functional error[%]
2	2	FEM	9	2.4873	25.005
2	2	Primal	9	2.3851	19.866
2	2	Comp.	8	1.4060	-29.340
2	2	Hybrid	-	1.8955	-4.7374
3	2	FEM	18	2.2394	12.546
3	2	Primal	18	2.1964	10.384
3	2	Comp.	12	1.6309	-18.038
3	2	Hybrid	-	1.9136	-3.8275
4	3	FEM	48	2.1380	7.4475
4	3	Primal	48	2.1091	5.9983
4	3	Comp.	36	1.7680	-11.144
4	3	Hybrid	-	1.9386	-2.5729
4	4	FEM	75	2.1372	7.4080
4	4	Primal	75	2.1051	5.7955
4	4	Comp.	64	1.7770	-10.694
4	4	Hybrid	-	1.9411	-2.4490
5	4	FEM	100	2.0875	4.9113
5	4	Primal	100	2.0676	3.9082
5	4	Comp.	80	1.8403	-7.5107
5	4	Hybrid	-	1.9539	-1.8013
5	5	FEM	144	2.0871	4.8894
5	5	Primal	144	2.0657	3.8137
5	5	Comp.	125	1.8447	-7.2900
5	5	Hybrid	-	1.9552	-1.7382

analitical functional = 1.9898

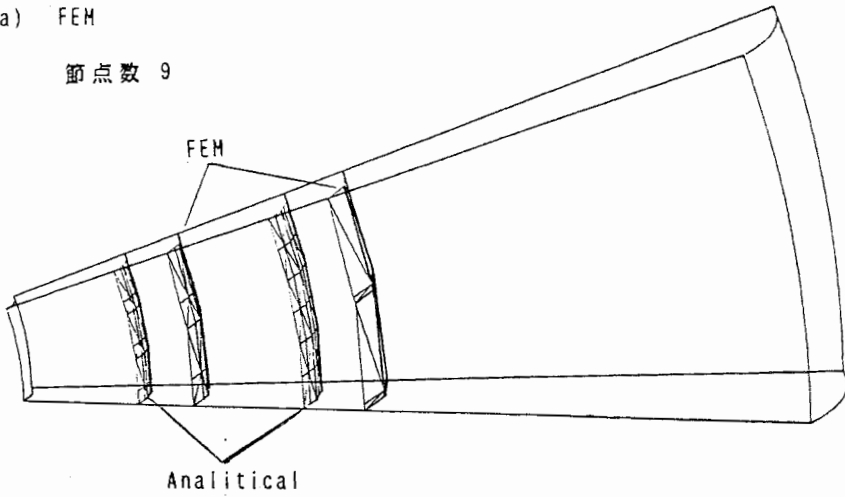
第5図 節点数とFunctionalの誤差の関係



第 6 図 電位分布

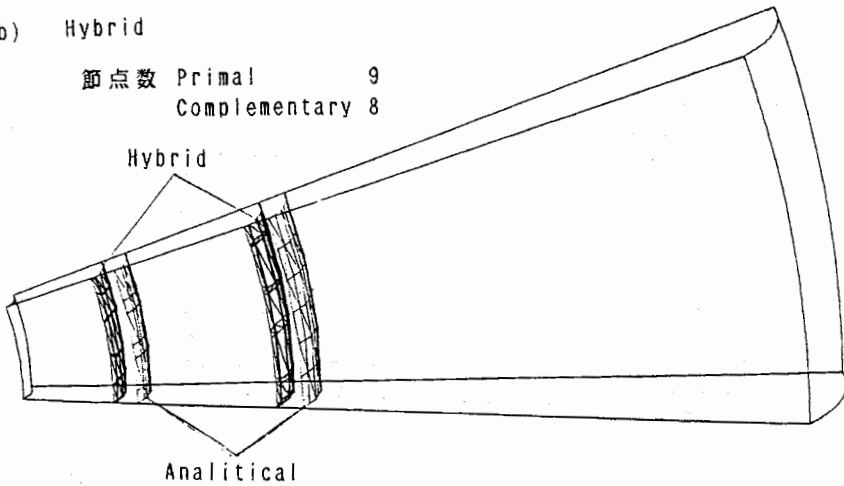
(a) FEM

節点数 9



(b) Hybrid

節点数 Primal 9
Complementary 8



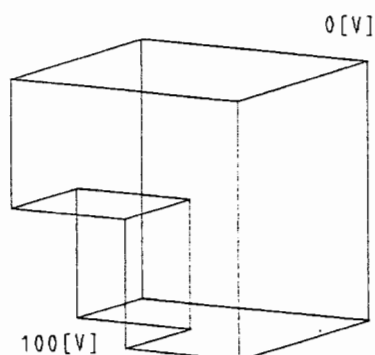
4. 2 立方体キャパシタンス

二番目の例題として立方体キャパシタンスの計算を行ないFunctionalの比較によって収束性を吟味した。

分割の方法は第7図でx方向、y方向、z方向を4~6に分けて六面体にし、その六面体を五、六個の四面体に分割する。

表2にいくつかの分割方法を行なったときの節点数とFunctionalの関係を示しそれらを第8図に図示した。この場合も明らかに、Functionalは同一値に収束しているが、Hybridが最もよい収束性を示していることがわかる。

第7図 立方体キャパシタンス

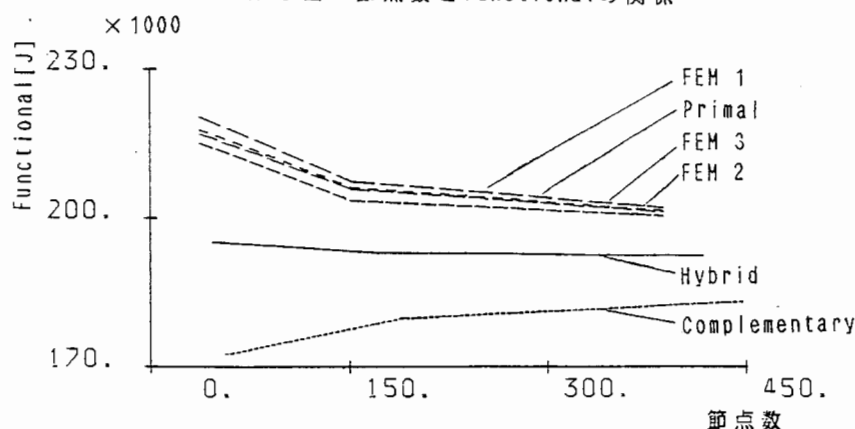


$\epsilon = 1 \text{ [F/m]}$
 内側の一辺の長さ = 2.0[m]
 外側の一辺の長さ = 4.0[m]

表 2

分割数		節点数	func. [J]
4	FEM 1	37	220237.28
4	FEM 2	37	216897.52
4	FEM 3	37	215093.28
4	Primal	37	217733.44
4	Comp.	56	172524.64
4	Hybrid	-	195129.04
6	FEM 1	152	207106.40
6	FEM 2	152	205623.04
6	FEM 3	152	203305.76
6	Primal	152	205990.08
6	Comp.	189	179726.96
6	Hybrid	-	192858.52
8	FEM 1	387	201720.32
8	FEM 2	387	200884.72
8	FEM 3	387	200115.68
8	Primal	387	201088.88
8	Comp.	448	183158.64
8	Hybrid	-	192123.80

第8図 節点数とFunctionalの関係



5. 結言

本報告では三次元のVoronoi-Delaunay離散化法の定式化を行ない、球形キャパシタンスと立方体キャパシタンスを計算例として取り上げ、検討した。その結果Voronoi-Delaunay離散化法は三次元静的問題に適用したときも二次元問題のときと同様に少ない節点数で精度の高い解を得ることができることが判明した。このことは節点数の多い三次元問題ではかなり有力な手法であると考えられる。

参考文献

- [1] 斉藤 他, "Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その1," MAG-85-62, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年7月18日.
- [2] 斉藤 他, "Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その2," MAG-85-63, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年7月18日.
- [3] 斉藤 他, "Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その3," MAG-85-151, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年11月14日.
- [4] 斉藤 他, "Voronoi-Delaunay離散化法による磁界計算 その4," MAG-85-152, 電気学会マグネティックス研究会資料昭和60年11月14日.
- [5] 小川 泰, 数理科学, No.231, sep.1982, pp.7-16
- [6] Y.Saito and et al, IEEE Trans.Magnetics, to be published in September 1986.
- [7] Penman, J. and J.R. Fraser, "Complementary and Dual Energy Finite Element Principles in Magnetostatics." IEEE Transaction on Magnetics, Vol. MAG-18. No. 2, March 1982, pp.319-324

原稿受付日

昭和61年7月31日