

動的ヒステリシスモデルの集中定数回路への応用

齋藤 兆古 ・ 早乙女 英夫
(法政大)

1982年9月24日

社団法人 電子通信学会

動的ヒステリシスモデルの集中定数回路への応用

A LUMPED CIRCUIT MODEL FOR NONLINEAR INDUCTOR EXHIBITING DYNAMIC HYSTERESYS LOOPS AND ITS APPLICATION TO THE ELECTRIC CIRCUITS

斉藤兆古[†]

早乙女英夫^{††}

Yoshifuru SAITO

Hideo SAOTOME

[†]法政大学工学部

^{††}法政大学大学院修士課程

COLLEGE OF ENGINEERING, HOSEI UNIVERSITY

第1章 序論

リアクトルの鉄心に用いる磁気材料にはヒステリシス現象がある。筆者らは動的ヒステリシス現象を表わす数学的モデルを提案し、その可飽和リアクトルの3次元解析への応用を試みた結果、良い精度を得た。[1]

本論文では、この動的ヒステリシスモデルを集中定数の電気回路解析へ応用するものであり、まず論文[1]で示した3次元分布定数系の特別な場合として得られる1次元集中定数モデルであるR-L回路について解析を行なう。次いで非線形共振現象の具体例としてR-L-C回路について解析を行ない、最後に非線形電気抵抗の具体例であるダイオードを含んだ単相半波整流回路について解析を行なう。それぞれ3種の電気回路について、実験値と計算値との比較をする。

$$H_a = H_\mu + H_s \quad (1)$$

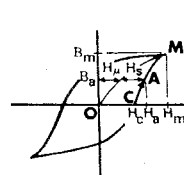
磁気飽和現象に起因する磁界の強さ H_μ と磁束密度 B_a との関係は次式で与えられる。

$$H_\mu = \left(\frac{1}{\mu}\right) B_a \quad (2)$$

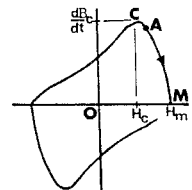
ここで μ は磁性体の透磁率である。一般に磁性体の透磁率 μ は定数ではなく、磁界の強さ H_μ の関数として与えられる。

$$\mu = f_\mu(H_\mu) \quad (3)$$

よって(2)式は磁気飽和現象を表わしている。第1図(b)に磁界の強さと磁束密度の時間微



(a) 磁気ヒステリシスループ



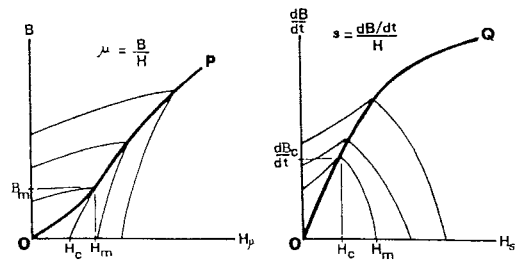
(b) H-dB/dt 特性

第2章 動的ヒステリシスモデル

2.1 動的ヒステリシス現象を表わす

磁界方程式

磁性体には磁気飽和現象とヒステリシス現象がある。第1図(a)に典型的なヒステリシスループを示す。第1図(a)の任意の点Aにおいて磁界の強さ H_a は、磁気飽和現象に起因する H_μ とヒステリシス現象に起因する H_s の2つの磁界成分に分解することができる。



(c) 磁化特性曲線

第1図 H-B, H-dB/dt 特性

分 dB/dt との関係を示す。第1図(a)および(b)の点C, AおよびMはそれぞれ対応して同じ時刻である。第1図(a)および(b)より以下の性質が得られる。

- (i) 第1図(a)のループの回転方向は反時計回りであるのに対して, 第1図(b)のループの回転方向は時計回りである。
- (ii) 第1図(a)において, $B > 0$ のとき $H_\mu > 0$, $B = 0$ のとき $H_\mu = 0$ として $B < 0$ のとき $H_\mu < 0$ である。
- (iii) 第1図(a)において, B が $+B_m$ から $-B_m$ まで変化するとき $dB/dt < 0$ となり, H_s は負の値をとる。
- (iv) 第1図(a)において, B が $-B_m$ から $+B_m$ まで変化するとき $dB/dt > 0$ となり, H_s は正の値をとる。
- (v) 第1図(a)において, B が正又は負の最大値 $\pm B_m$ に達したとき $dB/dt = 0$ となり, H_s は零である。
- (vi) 第1図(a)のヒステリシスループで囲まれた面積は単位体積当りのエネルギー損失に等しい。

これらの性質より次式を仮定することができる。

$$H_s = \left(\frac{1}{s}\right) \frac{dB_a}{dt} \quad (4)$$

ここで s は磁性体のヒステリシス係数である。ヒステリシス係数 s は H_s と dB_a/dt との関係から与えられ, 単位は $[\Omega/m]$ である。一般に磁性体のヒステリシス係数 s は定数ではなく, 磁界の強さ H_s の関数として与えられる。

$$s = f_s(H_s) \quad (5)$$

(vi) より第1図(a)の点Aにおいて, 単位体積当りで消費されるヒステリシス損失パワー P_a $[W/m^3]$ は次式で与えられる。

$$P_a = H_s \left(\frac{dB_a}{dt}\right) = \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{dB_a}{dt}\right)^2 \quad (6)$$

(1), (2) および (4) 式より動的ヒステリシス現象を考慮した磁界方程式が導びかれる。

$$H = \left(\frac{1}{\mu}\right) B + \left(\frac{1}{s}\right) \frac{dB}{dt} \quad (7)$$

2. 2 磁化特性曲線

前節で述べたように透磁率 μ やヒステリシス

係数 s は磁界の強さの関数となっており, この節では(3) および(5) 式の関数 f_μ および f_s の決定法について述べる。

第1図(a)の点Mでは磁束密度 B が最大値 B_m に達しており, 第1図(b)の点Mでは磁束密度の時間微分 dB/dt は零である。よって両図の点Mでは(7)式は次式の如くなる。

$$H_m = \left(\frac{1}{\mu_m}\right) B_m \quad (8)$$

したがって, このときの透磁率 μ_m は次式によって与えられる。

$$\mu_m = \frac{B_m}{H_m} \quad (9)$$

同様なことを大きさの異なる各ヒステリシスループについて考えると, それぞれのループの最大ピーク点の集合となる曲線は第1図(c)の左図の曲線OPの如くなり, 透磁率 μ は磁界の強さ H_μ の1個関数として与えられる。

第1図(b)の点Cでは磁束密度の時間微分 dB/dt が最大値 dB_c/dt に達しており, 第1図(a)の点Cでは磁束密度 B は零である。よって両図の点Cでは(7)式は次式の如くなる。

$$H_c = \left(\frac{1}{s_c}\right) \frac{dB_c}{dt} \quad (10)$$

したがって, このときのヒステリシス係数 s_c は次式によって与えられる。

$$s_c = \frac{dB_c/dt}{H_c} \quad (11)$$

同様なことを大きさの異なる各ループについて考えると, それぞれのループの最大ピーク点の集合となる曲線は第1図(c)の右図の曲線OQの如くなり, ヒステリシス係数 s は磁界の強さ H_s の1個関数として与えられる。

第3章 集中定数回路

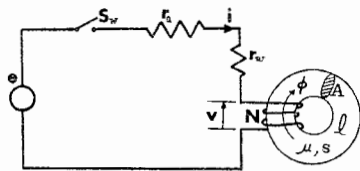
3. 1 R-L回路

第2図に可飽和リアクトルを用いたR-L回路を示す。コイルにかかる起磁力 F は(1)式より次式の如くなる。

$$F = H_\mu l + H_s l = N i_\mu + N i_s \quad (12)$$

ただし電流 i_μ および i_s は次式を満足する。

$$N i_\mu = H_\mu l, \quad N i_s = H_s l, \quad i = i_\mu + i_s \quad (13)$$



e : 外部印加電圧 v : コイルの誘起電圧
 R : 負荷抵抗 r_w : 巻線抵抗
 i : 負荷電流 ϕ : 磁束
 A : 鉄心断面積 l : 磁路長
 N : 巻数

第2図 R-L回路

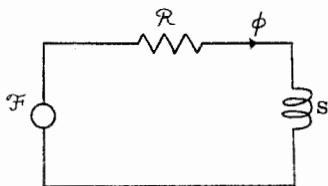
(7) および (12) 式より,

$$\mathcal{F} = \frac{l}{\mu} B + \frac{l}{S} \frac{dB}{dt} = \mathcal{R}\phi + S \frac{d\phi}{dt} \quad (14)$$

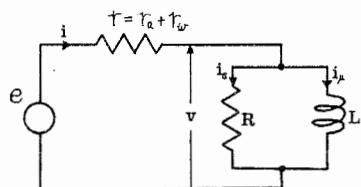
ただ \mathcal{R} および S はそれぞれ磁気抵抗およびヒステリシスパラメータで次式によって与えられる。

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}, \quad S = \frac{l}{sA} \quad (15)$$

(14) 式からヒステリシスを考慮した磁気回路は第3図の如くなる。



第3図 ヒステリシスを考慮したリアクトルの磁気回路



第4図 リアクトルのヒステリシスを考慮したR-L回路

従来のリアクトルの等価回路を用いると第2図のR-L回路は第4図の如くなる。ただし第4図の L および R はそれぞれリアクトルの自己インダクタンスおよびヒステリシスパワーを消費する電気抵抗であり、 $r = r_a + r_w$ である。

第2図および第4図より次式が成立する。

$$v = N \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di_\mu}{dt} = R i_s \quad (16)$$

また磁束鎖交数は次式で与えられる。

$$\lambda = L i_\mu = N\phi \quad (17)$$

(12) および (14) 式より,

$$i_\mu = \frac{1}{N} \mathcal{R}\phi, \quad i_s = \frac{1}{N} S \frac{d\phi}{dt} \quad (18)$$

(16), (17) および (18) 式より,

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}, \quad R = \frac{N^2}{S}, \quad L\mathcal{R} = R S = N^2 \quad (19)$$

第2図の可飽和リアクトルで消費されるヒステリシス損失パワー P_h は第4図および (16) 式より次式によって与えられる。

$$P_h = R i_s^2 = v i_s \quad (20)$$

リアクトルの鉄心の体積 $V = Al$ として,

(15), (18) および (19) 式を用いると (20) 式は次のようになる。

$$P_h = S \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{S} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 V \quad (21)$$

(21) 式は (6) 式にリアクトルの体積 V を掛けたものと一致している。

ここでもう一度第2図に着目して起磁力源について考えてみると次式を得る。

$$\mathcal{F} = \frac{N}{r} \left(e - N \frac{d\phi}{dt} \right) \quad (22)$$

(14) および (22) 式より次式を得る。

$$\mathcal{F} = \frac{N}{r} \left(e - N \frac{d\phi}{dt} \right) = \mathcal{R}\phi + S \frac{d\phi}{dt} \quad (23)$$

したがって次の磁束に関する非線形1階微分方程式を得る。

$$\frac{Ne}{r} = \left(\frac{N^2}{r} + S \right) \frac{d\phi}{dt} + \mathcal{R}\phi \quad (24)$$

(24) 式の磁気抵抗 \mathcal{R} およびヒステリシスパラメータ S は磁束 ϕ またはその微分 $d\phi/dt$ の関数となっているので、次にそれらの関係について述べる。

可飽和リアクトルに貯わえられる磁気エネルギー W_m は次式によって与えられる。

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H_\mu^2 V = \frac{1}{2} \mathcal{R}\phi^2 \quad (25)$$

よって,

$$H_\mu = \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{\mu V}} \phi^2 \quad (26)$$

ヒステリシス損失パワー P_h は(4), (6)および(21)式より次式によって与えられる。

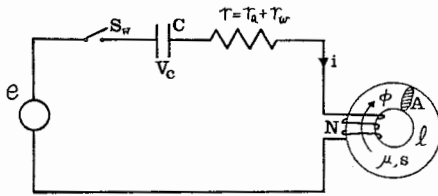
$$P_h = s H_s^2 V = S \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \quad (27)$$

よって,

$$H_s = \sqrt{\frac{S}{sV} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2} \quad (28)$$

(26)および(28)式の結果を(3)および(5)式に代入して, ここで得られた μ および s を(15)式にそれぞれ代入することによって R および S を計算することができる。

3.2 R-L-C回路



C: 静電容量 V_c : コンデンサ端子電圧

第5図 R-L-C回路

第5図に可飽和リアクトルを用いたR-L-C回路を示す。第5図で説明している物理定数は第2図のものと同様である。負荷電流 i は次式によって与えられる。

$$i = \frac{1}{T} (e - v_c - N \frac{d\phi}{dt}) \quad (29)$$

よってコイルにかかる起磁力 F は(14)および(29)式を用いて次式の如く書ける。

$$F = \frac{N}{T} (e - v_c - N \frac{d\phi}{dt}) = R\phi + S \frac{d\phi}{dt} \quad (30)$$

(30)式を整理すると,

$$\frac{Ne}{T} = \left(\frac{N^2}{T} + S \right) \frac{d\phi}{dt} + R\phi + \frac{N}{T} v_c \quad (31)$$

負荷電流 i とコンデンサ端子電圧との間には次の関係がある。

$$i = C \frac{dv_c}{dt} \quad (32)$$

よってリアクトルの鉄心にかかる起磁力 F は(14)および(32)式を用いて次式の如く書ける。

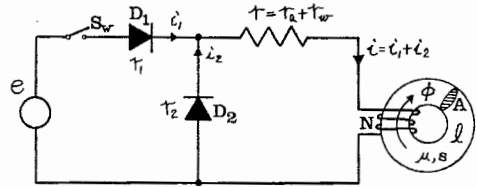
$$F = NC \frac{dv_c}{dt} = R\phi + S \frac{d\phi}{dt} \quad (33)$$

(33)式を整理すると,

$$0 = S \frac{d\phi}{dt} - NC \frac{dv_c}{dt} + R\phi \quad (34)$$

したがって(31)および(34)式を連立して解いて磁束 ϕ およびコンデンサ端子電圧 v_c を求めることによって, 第5図のR-L-C回路の解析ができる。

3.3 単相半波整流回路



D_1 : 整流ダイオード D_2 : 環流ダイオード
 r_1 : D_1 の抵抗 r_2 : D_2 の抵抗
 i_1 : D_1 を流れる電流 i_2 : D_2 を流れる電流

第6図 単相半波整流回路

3.1および3.2節ではリアクトルの磁気飽和およびヒステリシスの2つの非線形要素を含んだ回路について考察した。本節ではこれらに加えて回路の電気抵抗の非線形要素を含んだ例として, 第6図に示すような環流ダイオードを用いた単相半波整流回路の解析をする。第6図で説明している物理定数は第2図のものと同様である。

第6図のダイオード D_1 および D_2 の抵抗はそれぞれ電流 i_1 および i_2 の関数として与えられる。

$$r_1 = f_1(i_1), \quad r_2 = f_2(i_2) \quad (35)$$

一般の整流回路においては, 関数 f_1 および f_2 は電流 i_1 および i_2 が負の値であると無限に大きな値をとるものと考えられる。一方順方向電流に対しては, その電流値に応じた有限の低い値をとるものと考えられる。

第6図より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_1 + r(i_1 + i_2) + N \frac{d\phi}{dt} &= e \\ r_2 i_2 + r(i_1 + i_2) + N \frac{d\phi}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

(36)式から i_1 および i_2 を求めると次式の如くなる。

$$i_1 = \left\{ \left(1 + \frac{r}{r_2} \right) e - N \frac{d\phi}{dt} \right\} / \left\{ r_1 + r \left(1 + \frac{r}{r_2} \right) \right\} \quad (37)$$

$$i_2 = \left\{ -\frac{r}{r_1} e^{-N \frac{d\phi}{dt}} \right\} / \left\{ t_2 + r \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \right\} \quad (37)$$

(37)式を整理すると,

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \left\{ (t_2 + r) e^{-r_2 N \frac{d\phi}{dt}} \right\} / \left\{ r_1 t_2 + r(r_1 + r_2) \right\} \\ i_2 &= \left\{ -r e^{-r_1 N \frac{d\phi}{dt}} \right\} / \left\{ r_1 t_2 + r(r_1 + r_2) \right\} \end{aligned} \right\} (38)$$

よって負荷電流 i は次式の如くなる。

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ &= \left\{ t_2 e^{-(r_1 + r_2) N \frac{d\phi}{dt}} \right\} / \left\{ r_1 t_2 + r(r_1 + r_2) \right\} \\ &= \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-N \frac{d\phi}{dt}} \right) / \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r \right) \quad (39) \end{aligned}$$

したがってリアクトルの鉄心にかかる起磁力 \mathcal{F} は(34)および(39)式を用いて次式の如く書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= N \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} e^{-N \frac{d\phi}{dt}} \right) / \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r \right) \\ &= \mathcal{R} \phi + S \frac{d\phi}{dt} \quad (40) \end{aligned}$$

(40)式を整理すると次式を得る。

$$\frac{aNe}{r_0} = \left(\frac{N^2}{r_0} + S \right) \frac{d\phi}{dt} + \mathcal{R} \phi \quad (41)$$

ただし,

$$r_0 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r, \quad a = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} X_{t+\Delta t} &= \left(A_{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{2} B_{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)^{-1} \left\{ \Delta t F_{t+\frac{\Delta t}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \left(A_{t+\frac{\Delta t}{2}} - \frac{\Delta t}{2} B_{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) X_t \right\} \quad (45) \end{aligned}$$

(24)式よりR-L回路では各行列の値は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} X &= [\phi], \quad F = \left[\frac{Ne}{r} \right] \\ A &= \left[\frac{N^2}{r} + S \right], \quad B = [\mathcal{R}] \end{aligned} \right\} (46)$$

(31)および(34)式よりR-L-C回路では各行列の値は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Ne/r \\ 0 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} N^2/r + S & 0 \\ 0 & -NC \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & N/r \\ \mathcal{R} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (47)$$

(41)式より単相半波整流回路では各行列の値は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} X &= [\phi], \quad F = [aN_e/r_0] \\ A &= [N^2/r_0 + S], \quad B = [\mathcal{R}] \end{aligned} \right\} (48)$$

第7図に解 X を求める数値計算の流れ図を示す。

第4章 数値計算および実験値との比較

4.1 数値計算

一般に行列 X に関する微分方程式を行列 F , A および B を用いて次式の如く表わすことができる。

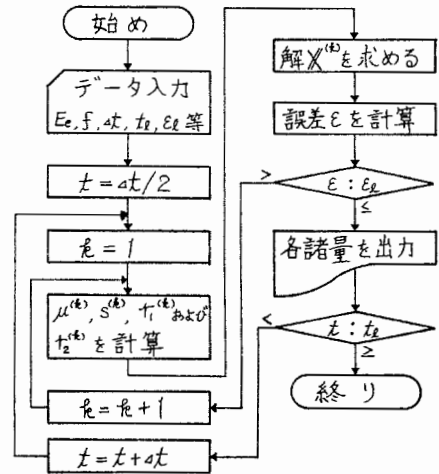
$$F = A \dot{X} + B X \quad (43)$$

ただし \dot{X} は X の時間微分を表わす。

(43)式を有限差分法を用いて離散化して時刻 $(t + \Delta t/2)$ の時を考えると次式の如くなる。ただし Δt は時間をごみ幅である。

$$\begin{aligned} F_{t+\frac{\Delta t}{2}} &= A_{t+\frac{\Delta t}{2}} \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} \\ &\quad + B_{t+\frac{\Delta t}{2}} \frac{1}{2} (X_{t+\Delta t} + X_t) \quad (44) \end{aligned}$$

(44)式より $X_{t+\Delta t}$ を求めると次式の如くなる。



E_0 : 電源電圧実効値
 f : 電源周波数
 Δt : 時間ごみ幅
 t_r : 最終時刻
 E_2 : 許容誤差
 k : 反復回数

第7図 流れ図

4.2 計算値と実験値との比較

本論文で用いたリアクトルの鉄心は内径0.08[m], 外径0.10[m], 厚さ0.01[m]で磁路断面積は $1 \times 10^{-4} [m^2]$ の正方形である。この鉄心の磁化特性を第8図に示す。

単相半波整流回路に用いたダイオードは東芝1S1660で、 D_1 および D_2 の順方向電流に対する抵抗値を第1表に示す。

R-L回路の定常状態および過渡状態の実験値と計算値を第9図, 第10図および第11図に示す。印加電圧の実効値 E_e , 周波数 f , 入力位相角 θ , コイルの巻数 N , 時間きざみ幅 Δt および電気抵抗 r は第2表に示すとおりである。

R-L-C回路のコイルの巻数 N およびコンデンサ容量 C は, 第8図より得られた鉄心の透磁率の値を目安に $N=1500$ [回] および $C=50$ [μF] を選んだ。この回路では $E_e=30$ [V] のときはどんな入力位相角でも共振は起こらず, $E_e=40$ [V] のときはあらゆる入力位相角に対して共振を生ずる。 $E_e=35$ [V] のときは第12図および第13図に示すように, 共振現象の有無は入力位相角に依存する。

以上2つの回路例では磁束および電流が正および負の両方の値をとるのに対して, 整流回路ではこれらは正の値のみをとる。単相半波整流回路の過渡状態および定常状態の実験値と計算値を第14図および第15図に示す。

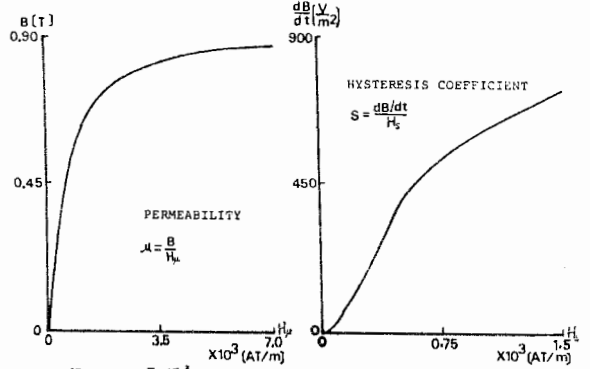
4.3 考察

(i) 第9図, 第10図および第11図より本論文で用いたヒステリシスモデルは, 定常状態のみならず歪波を含んだ場合の過渡状態についても有効である。

(ii) 第12図に対して第13図の磁束は飽和領域にまで達しており, 共振の臨界電圧付近では共振の有無は入力位相角に依存する。

(iii) 単相半波整流回路で回路方程式は電流ではなく磁束についての微分方程式となっており, r_1 および r_2 が無限大の値をとった場合でも(41)式を解くことができる。

(iv) (42)式の r_1 および r_2 を第1表に示すような非線形電気抵抗とみなすことによって(41)式はダイオードのスイッチング特性を考慮することができ, 第14図および第15図の電流波形で10 msecごとダイオードの



第8図 実験に用いた鉄心の磁化特性

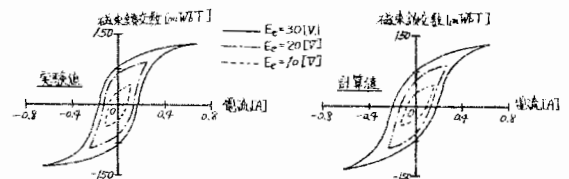
第1表 実験に用いたダイオードの特性

i_1, i_2 [A]	0.0038	0.010	0.023	0.036	0.098
r_1 [Ω]	153	61.7	28.8	18.6	14.1
r_2 [Ω]	155	60.8	28.5	18.6	14.0
i_1, i_2 [A]	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
r_1 [Ω]	7.11	3.67	2.49	1.89	1.53
r_2 [Ω]	7.02	3.63	2.46	1.87	1.50
i_1, i_2 [A]	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
r_1 [Ω]	0.788	0.535	0.407	0.330	0.278
r_2 [Ω]	0.771	0.521	0.395	0.318	0.267

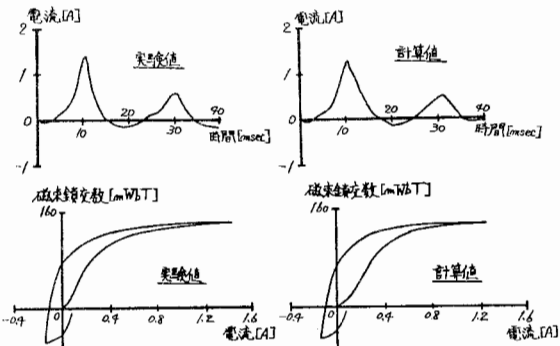
第2表 計算に用いた物理定数

図	E_e [V]	f [Hz]	θ [deg]	N [回]	Δt [msec]	r [Ω]
第9図	—	50	—	900	0.125	6.30
第10図	20	50	21.4	900	0.125	6.30
第11図	15	50	153.0	900	0.100	6.30
第12図	35	50	53.4	1500	0.250	16.4
第13図	35	50	35.1	1500	0.250	16.4
第14図	10	50	0.0	800	0.100	5.86
第15図	10	50	—	800	0.100	5.86

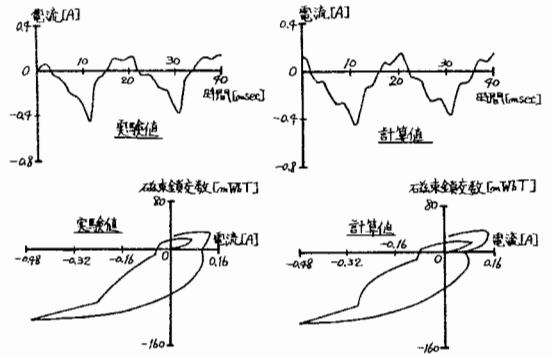
第11図以外は $e = \sqrt{2} E_e \sin(2\pi ft + \theta)$



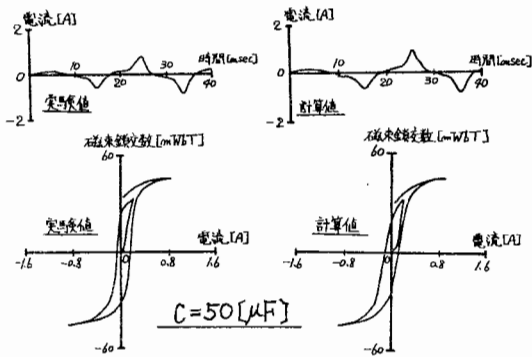
第9図 R-L回路の定常状態におけるヒステリシスの電圧特性



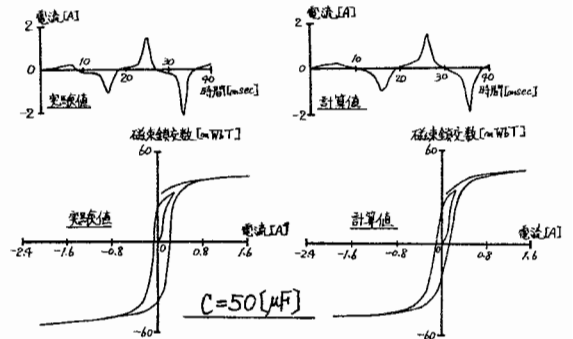
第10図 R-L回路の過渡現象(1)



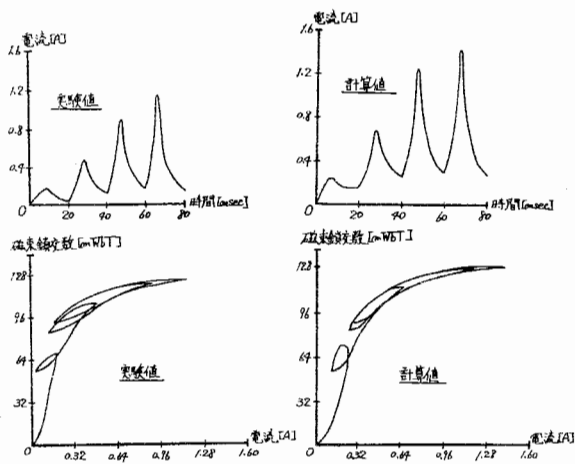
$$e = \sqrt{2} E_e (\sin(2\pi ft + \theta) + \frac{1}{2} \sin[5(2\pi ft + \theta)])$$
 第11図 R-L回路の過渡現象(2)



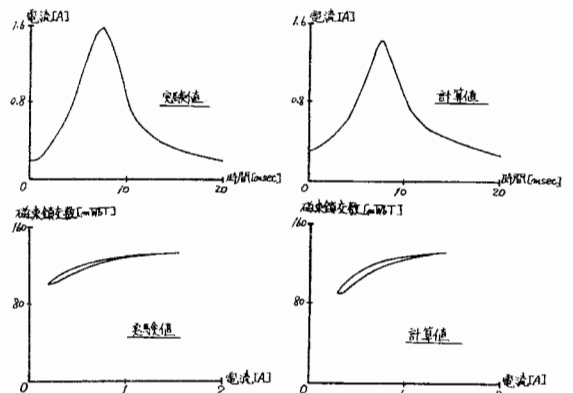
第12図 R-L-C回路の過渡現象(1)



第13図 R-L-C回路の過渡現象(2)



第14図 整流回路の過渡現象



第15図 整流回路の定常状態特性

スイッチングが行なわれているにもかかわらず電流波形は連続である。

(V) 第14図および第15図より本論文で用いたヒステリシスモデルは電流に直流分が含まれている場合にも有効であり、ヒステリシスマイナーループも再現することができる。

第5章 結言

本論文で用いたヒステリシスモデルは直流分を含んだ歪波電流に対しても有効である。

単相半波整流回路ではダイオードのスイッチング動作を計算機のプログラムの条件文でON又はOFFさせるのではなく、ダイオードを非線形電気抵抗とみなすことによって1つの回路方程式で解析することができる。

最後に種々の御意見を頂いた本学山村龍男教授に厚くお礼を申し上げる。

文献

- [1] Y. Saito, "Three-Dimensional Analysis of Magnetodynamic Fields in Electromagnetic Devices Taken into Account the Dynamic Hysteresis Loops," IEEE Trans. Magnetics, Vol. MAG-18, PP546-551, Mar. 1982

〔付録〕

時刻 $(t+\Delta t/2)$ で反復回数 k 回目の各非線形パラメータは以下の式で計算することができる。

$$\left. \begin{aligned} H_{\mu,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= \sqrt{\frac{R_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}}{\mu_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}} \frac{V}{V}} \left\{ \frac{(\phi_{\text{rot}}^{(k-2)} + \phi_{\text{rot}}^{(k-1)})/2 + \phi_c}{2} \right\}^2 \\ \mu_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= f_{\mu}(H_{\mu,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)}), \quad R_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} = \frac{l}{\mu_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} A} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{s,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= \sqrt{\frac{S_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}}{S_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}} \frac{V}{V}} \left\{ \frac{(\phi_{\text{rot}}^{(k-2)} + \phi_{\text{rot}}^{(k-1)})/2 - \phi_c}{\Delta t} \right\}^2 \\ S_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= f_s(H_{s,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)}), \quad S_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} = \frac{l}{S_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} A} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= \left\{ \left(1 + \frac{\tau}{\tau_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}}\right) e^{-N \frac{(\phi_{\text{rot}}^{(k-2)} + \phi_{\text{rot}}^{(k-1)})/2 - \phi_c}{\Delta t}} \right\} / \left\{ \tau_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)} + \tau \left(1 + \frac{\tau_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}}{\tau_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}}\right) \right\} \\ \tau_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= f_1(i_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{2,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= \left\{ -\frac{\tau}{\tau_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)}} e^{-N \frac{(\phi_{\text{rot}}^{(k-2)} + \phi_{\text{rot}}^{(k-1)})/2 - \phi_c}{\Delta t}} \right\} / \left\{ \tau_{2,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)} + \tau \left(1 + \frac{\tau_{2,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k-1)}}{\tau_{1,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)}}\right) \right\} \\ \tau_{2,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)} &= f_2(i_{2,t+\frac{\Delta t}{2}}^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (d)$$