

2004 年度 修士論文

電気双極子を用いた
電気インピーダンス法に関する研究

A Study of Electrical Impedance Method
Using Electric Dipole

法政大学大学院 電気工学専攻 修士課程

学籍番号： 03R3211

氏名： 音川 英一

指導教授： 斎藤 兆古 教授

27 February 2005

Abstract

With the developments of modern high-speed computer, X-ray tomography and MRI(Magnetic Resonance Imaging) are widely used as a deterministic tool of medical diagnosis. On the other side, EIT (Electrical Impedance Tomography) is now developing mainly for industrial use. Fundamental difference between them is that MRI or X-ray tomography needs not to handle the functionally measured data, but EIT is based on the functional nature of the measurable data. Namely, EIT requires a solution of ill-posed system equations but MRI or X-ray tomography never require the solution of such the ill-posed system of equations. Because of the reliability of obtainable tomography, EIT is not employed to the medical use. Even though EIT does not give the reliable tomography, United State of America, England and the other countries are still developing the EIT. In particular, EIT is intensively developed as one of the national projects in China. EIT has several merits compared with that of MRI and X-ray tomography from a viewpoint of the cost and simple electromechanical structures. If it is possible to obtain the reliable solution of ill-posed system equations accompanying with EIT, then EIT may be used not only the industrial use but also medical use. In the present paper, we propose one of the most reliable solution methodologies accompanying with EIT development.

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	関数型トモグラフィ理論	3
2.1	関数型トモグラフィの概要	3
2.2	Sensitivity 行列法	3
2.2.1	Sensitivity 行列法の概要	3
2.2.2	Sensitivity 行列の定式化	4
2.3	電気双極子法	7
2.3.1	電気双極子法の概要	7
2.3.2	電気双極子による定式化	7
2.3.3	各測定データの扱いと畳み込み演算	9
第 3 章	システム方程式の解法	11
3.1	逆問題の概要	11
3.2	GVSPM 法	11
3.3	その他の逆問題解法との比較	13
第 4 章	関数型トモグラフィのシミュレーション法	15
4.1	有限要素法の概要	15
4.2	Poisson の方程式と Laplace の方程式	15
4.3	変分学	17
4.4	汎関数の導出	19
4.4.1	電界系汎関数	19
4.4.2	導電率を含む電界系汎関数	20
4.4.3	磁界系汎関数	20
4.4.4	汎関数の一般的な表記	21
4.5	電界系汎関数と Poisson の方程式	21
4.6	一次三角要素による空間の離散化	23
4.7	汎関数と一次三角要素	25
4.8	汎関数の第一変分	27
4.9	複数要素の結合	29
4.10	一次三角形要素の面積	30
4.11	一次三角形要素の角度表現	31
4.12	汎関数第二項の計算	31
第 5 章	関数型トモグラフィ理論の検証	35
5.1	シミュレーションによる検証	35
5.1.1	シミュレーションの概要	35
5.1.2	Sensitivity 行列法のシミュレーション	35
5.1.3	電気双極子法のシミュレーション	37
5.1.4	シミュレーション結果の考察	43
5.2	実験による検証	44
5.2.1	実験の概要	44
5.2.2	Sensitivity 行列法の実験	44

5.2.3	電気双極子法の実験	46
5.2.4	実験結果の考察	50
第 6 章	結論	51
付 録 A	Sensitivity 行列法を用いたシミュレーション	53
A.1	キャパシタンス・トモグラフィ	53
A.2	磁気トモグラフィ	55

第1章 序論

現在，実用化されている断層撮影技術 (Tomography Technology) として，X 線 CT(X-ray Computerized Tomography) や MRI(Magnetic Resonance Imaging) などが挙げられる．これらの技術は，その有効性から医療分野などで非常に重要な地位を占めている．

これらの技術の問題点として，設備が比較的大型で，比較的高価であるという点が挙げられる．X 線 CT を行うためには，X 線照射装置などが必要であり，MRI を行うためには，強力な磁界生成のために超伝導磁石が必要となる．これらの装置は比較的大型であり，また比較的高価である．

これらの問題を解消すべく，より小型の装置で安価に断層撮影を行うための研究が各国で行われている．これらの研究の一例として，電気インピーダンス・トモグラフィ(Electrical Impedance Tomography)，キャパシタンス・トモグラフィ(Capacitance Tomography)，磁気トモグラフィ(Magnetic Tomography) などが挙げられる．これらの技術は，現在実用には至っていない分野である．

電気インピーダンス・トモグラフィ，キャパシタンス・トモグラフィ，磁気トモグラフィなどの断層撮影技術は，断層撮影対象物への働きかけに対する応答が二次元以上の関数で表現される．そのため，これらの断層撮影技術を関数型トモグラフィ(Functional Tomography) と分類する．二次元以上の関数の応答を元にする点が関数型トモグラフィの断層撮影映像生成の理論確立を困難にしている．

例えば，電気インピーダンス・トモグラフィでは，断層撮影対象に電流を流し，その際に断層撮影対象表面に現れる電圧値，もしくは断層撮影対象の電気抵抗値を用いて断層撮影対象内の導電率分布を算出し，断層撮影映像とすることが目的である．断層撮影対象に注入された電流が断層撮影対象内に作る電圧分布や電気抵抗値は Poisson の方程式や Laplace の方程式のような二次元以上の関数であらわされる．

X 線 CT や MRI などでは，断層撮影対象への働きかけに，X 線やマイクロ波を用いる．X 線やマイクロ波は断層撮影対象内を直進する性質を持っているので，その応答は一次元関数で表現することができる．例えば，X 線 CT では断層撮影対象に X 線を照射し，X 線が断層撮影対象内を通過する際の減衰率を計測する．この X 線減衰率データを用いて，断層撮影対象内の X 線減衰率分布を算出し，断層撮影映像とすることが目的である．

X 線は断層撮影対象内を直進する性質を持つため，測定される X 線減衰率は，X 線が通過してきた直線上の部分が持つ減衰率を線積分した値となる．よって，X 線照射角度を変化させて測定データを増やし，二次元化することで断層撮影対象内の X 線減衰率分布を算出する理論の確立がなされている．具体的には，逆フーリエ変換法 (Inverse Fourier Method)，重み付き逆投影法 (Weighted Back Projection Method)，Radon 変換法 (Radon Transform Method) などの断層撮影映像生成法が確立されている．

電気インピーダンス・トモグラフィでは，電流注入角度を変更しても，断層撮影対象に注入された電流が断層撮影対象内に作る電圧分布や電気抵抗値は二次元以上の関数であらわされるため，断層撮影対象内全体が電圧値，電気抵抗値に影響を与える．このような問題点から，関数型トモグラフィでは未知数である断層撮影対象内部の状態を一意に決定できる定式化は確立されていない．そのため，現在の関数型トモグラフィでは未知数である断層撮影対象内部の状態を一意に決定できない不適切なシステム方程式から，逆問題 (Inverse Problem) 解法を用いて断層撮影映像を得る手法を用いることが一般的である．

このような違いが X 線 CT は実用化され，電気インピーダンス・トモグラフィが実用化に至っていないという結果の違いにつながっている．

以上のように関数型トモグラフィは，いまだ発展途上の研究分野であるが，設備の安価さや小型化の可能性から，各国で研究が行われている．特に，多くの人口を抱える中国などでは，国家計画として研究・開発が行われている．^[1]

断層撮影における測定機器の小型化は，断層撮影の適用対象の拡大にもつながると考えられる．X 線 CT や MRI で用いられる大型の設備は，運搬することが難しいので，測定対象を測定機器の場所へと運搬して用いることが基本となる．それに対し，関数型トモグラフィで用いられるような小型設備であれば，設備を測定対象の方

へと運搬すると言った利用法が可能となる。

また、X線CTやMRIでは設備が複雑であることから、断層撮影対象の大きさに合わせて設備を製作しなくてはならない。そのため、対象物の大きさに対する柔軟性が低い。具体的には、X線CTでは対象物に対して周回するようにX線照射装置のガイドレールを作成する必要がある。これは、一度製作した設備のサイズを変更することは困難であることを意味する。一方、電気インピーダンス・トモグラフィなどで使用する設備は対象物の大きさに対して柔軟に対応できるという利点がある。電気インピーダンス・トモグラフィでは断層撮影対象への働きかけに電気を用いるため、断層撮影対象と電源をつなぐケーブルはフレキシブルな銅線を用いることが可能である。

関数型トモグラフィの研究で最も一般的な理論の一つとして、Sensitivity 行列法が挙げられる。Sensitivity 行列法は、一種のパターンマッチング法と考えることができる。断層撮影対象内における媒質のパラメータの変化が空間全体に与える影響を Sensitivity(感度) と定義して、そのパターンから同一のものを選び出すという作業を行う。パターンマッチング法においては、用意するパターン数が結果の精度に大きく影響を与えるわけだが、Sensitivity 行列法では、パターンに一定の条件を課して、その数を限定しているところに大きな問題が存在する。パターンを限定する理由は、断層撮影対象内を離散化した際に考えられる空間パラメータの全分布パターンを考慮することが非現実的であるという点にある。空間パラメータ分布パターンは、空間の離散化数の増加に対して指数関数的に増加する。そのため、全ての組み合わせを考えることは非常に困難である。

Sensitivity 行列法では、この問題に対する妥協案として、離散化した空間の一箇所のみが異なる空間パラメータである場合のパターンにおける Sensitivity 値のみを用意し、二箇所以上に異なる空間パラメータ領域がまたがる場合の Sensitivity 値は、その二箇所の Sensitivity 値の和で表すことができると仮定する。

電気インピーダンス・トモグラフィにおいて、全体の Sensitivity 値が、全ての離散化点の Sensitivity 値の和であらわされるとする仮定は、抵抗の直列接続に相当する。しかし、空間のパラメータ分布が単純に抵抗の直列接続として扱えるかと考えたとき、必ずしもそうではないことは明白である。パターンマッチング法における多すぎる組み合わせ数に対する妥協案が理論的に妥当なものではないことが、Sensitivity 行列法の最大の問題点であると考えられる。また、このような妥協案に頼らざるを得ない点がパターンマッチング法の限界であると考えられる。

多くの研究が行われてきた Sensitivity 行列法に前述のような欠陥が認められることから、本論文では、関数型トモグラフィに対し電気双極子法という新たな定式化法を提唱する。電気双極子法とは、断層撮影対象内を離散化した各点に電磁気学における電気双極子が存在するものとし、その電気双極子が作る電圧分布が、断層撮影対象内に電流を流した際に生じる電圧分布と等価であるとする考え方である。電気双極子の持つ電荷の大きさは、電気回路における逆起電力に相当すると考える。また、電気双極子の持つ電荷の大きさは、その離散化点の空間パラメータの大きさに、ほぼ比例するものと考えられる。つまり、電気双極子の位置と大きさを求めることが空間のパラメータ分布を求めることと、ほぼ等価であると考えられることができる。

電気双極子法の利点は、各離散化点に存在する電気双極子とその周囲に作る電圧分布に重ねの理が成り立つ点にある。換言すれば、複数の電気双極子が作る電圧分布は、個々の電気双極子が作る電圧分布の和で表すことができる。そのため、Sensitivity 行列法のようなパターンマッチング法とは異なり、離散化点の組み合わせパターンを考える必要も無く、パターン数を限定するために課した非合理的な仮定も存在しない。

本論文は関数型トモグラフィの新たな定式化法として電気双極子法を提案し、一般的に研究が行われている Sensitivity 行列法の矛盾点と、電気双極子法の有効性の二点について検証を行うものである。

第2章 関数型トモグラフィ理論

2.1 関数型トモグラフィの概要

関数型トモグラフィの特徴は、断層撮影対象への働きかけに対する応答が二次元以上の関数によって表現される点にある。これは、断層撮影対象への働きかけに電界や磁界を用いるためである。二次元以上の関数によって表現される応答を元にしてしている点が、断層撮影映像生成理論の確立を困難にしている。また、多くの研究で提案される理論は不適切な線形システム方程式を伴ったものとならざるを得なく、解を一意に決定することができないという問題も抱える。このように、関数型トモグラフィは発展途上の理論分野である。

しかし、現在、広く普及している X 線 CT や MRI などの断層撮影技術に比べ、断層撮影を行うために必要とされる機器が比較的安価、小型であるという利点から、非常に魅力のある研究分野であると言える。

関数型トモグラフィにおいて最も研究が行われている理論の一つに Sensitivity 行列法が挙げられる。しかし、Sensitivity 行列法は理論的に大きな欠点を抱えている。そこで、本研究では関数型トモグラフィの新たな定式化理論として電気双極子法を提案する。本章では、多くの研究が行われている Sensitivity 行列法の理論、および関数型トモグラフィの新たな定式化法である電気双極子法の理論について述べる。

2.2 Sensitivity 行列法

2.2.1 Sensitivity 行列法の概要

Sensitivity 行列法は一種のパターンマッチング法である。Sensitivity とは感度であり、関数型トモグラフィにおける Sensitivity は断層撮影対象内の一部で生じる媒質の変化が断層撮影対象全体のインピーダンスに与える影響はどの程度であるかを表す。そのパターンを用いて、実際に求めたい断層撮影対象の Sensitivity 値がどのパターンに相当するかを照合し、一致するパターンを断層撮影映像と定義する。

この方法は、三点の問題を抱える。一点目は、媒質の分布パターンを完全に定義することが困難であるということである。断層撮影対象内の離散化数の増加に対して、媒質の分布パターン数は指数関数的に増加する。そのため、断層撮影対象を行うために十分な離散化数における全ての媒質の分布パターンを用意することは、現実的には非常に困難である。この問題点に対し、Sensitivity 行列法では、断層撮影対象内を離散化した際の最小領域要素でのみ媒質変化が生じた場合の Sensitivity 値のみをパターンとして用いるという妥協案を採用している。

二点目は、Sensitivity 値の合成法が現実の理論とは一致しないことである。一点目の問題を解決するために媒質分布パターンに条件を設けて、媒質分布パターン数を限定したのだが、これでは複数要素で媒質変化が生じている場合を表現できない。そこで、Sensitivity 行列法では複数要素の媒質変化は、各点の媒質変化における Sensitivity 値の和で表すという妥協案を採用している。電気インピーダンス・トモグラフィにおいて、この合成法は、抵抗の直列接続に相当する。しかし、実際には複数要素の媒質の合成が全て直列接続で考えられるわけではないので、ここに大きな矛盾が生じることになる。

三点目は、システム方程式が不適切な線形システム方程式 (Illposed Linear System Equation) であることである。よって、システム方程式を解く事は、逆問題 (Inverse Problem) であり、その解を一意に決定することができないという問題を抱える。単純なパターンマッチングを考えるならば、必ずしも逆問題を解く事にはならないのだが、一点目の問題点を解決する代償として、システム方程式が不適切なものとなっている。

これら全ての問題点は、パターンマッチング法の抱える弱点が原因となっている。

2.2.2 Sensitivity 行列の定式化

Sensitivity 行列法を用いた電気インピーダンス・トモグラフィでは、断層撮影対象に電圧を印加した際に、断層撮影対象が持つインピーダンスを用いて断層撮影を行う。この場合の Sensitivity は、断層撮影対象内で生じた導電率の変化が、断層撮影対象全体のインピーダンスに与える影響力を表す。

図.2.2.1は領域内が均一の媒質で構成されているものとする。このときの媒質の導電率を a [S/m] であるとし、この媒質分布状態を基準状態と定義する。領域外周部に設置された 12 極の電極から、 i, j の二極を用いて計測される領域全体のインピーダンスを $Z_{i,j}^a[\Omega]$ とする。図.2.2.2のように、領域の一部の離散化領域 r_n で媒質が b [S/m] に変化した場合、 i, j の二極を用いて計測される領域全体のインピーダンスを $Z_{i,j}^b[\Omega]$ とする。図.2.2.1 から図.2.2.2の状態への媒質変化に伴う領域全体のインピーダンス変化量 $Z'_{i,j}[\Omega]$ は式 (2.2.1) のように表される。

$$Z'_{i,j}{}^{r_n} = Z_{i,j}^{r_n} - Z_{i,j}^a \quad (2.2.1)$$

式 (2.2.1) で表されるインピーダンス変化量に対して二種類の正規化をかけると、式 (2.2.2) のようになる。

$$S_{i,j}^{r_n} = \frac{1}{\beta} \frac{Z_{i,j}^{r_n} - Z_{i,j}^a}{Z_{i,j}^b - Z_{i,j}^a} \quad (2.2.2)$$

$$\beta = \frac{D_n}{D_{all}} \quad (2.2.3)$$

一種類目の正規化として、断層撮影領域内で生じるインピーダンス変化量の最大値 $Z_{i,j}^b - Z_{i,j}^a$ [Ω] で正規化する。二種類目として離散化領域 r_n の面積 D_n [m²] が断層撮影対象領域の全面積 D_{all} [m²] に占める割合である β で正規化する。この二種類の正規化をかけることで、媒質の具体的な値に依存しなくなる、離散化による最小領域の面積のばらつきを考慮しなくてよくなるという二点の効果が得られる。ただし、この正規化を行うことは、断層撮影対象内を構成する媒質は二種類しか存在しないことを意味していることに注意する必要がある。

式 (2.2.2) で得られる $S_{i,j}^{r_n}$ が測定電極組み合わせ i, j における、離散化領域 r_n の Sensitivity 値である。このような Sensitivity 値を測定電極 i, j の全ての組み合わせと、全ての離散化領域 r_n について並べたものを Sensitivity 行列と定義する。また、任意の媒質分布状態を κ 、そのときの測定電極 i, j の全ての組み合わせにおけるインピーダンス変化量 $Z'[\Omega]$ は式 (2.2.5) のように表されるものとする。

$$\begin{bmatrix} Z'_{1,1} \\ Z'_{1,2} \\ \vdots \\ Z'_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1}^{r_1} & S_{1,1}^{r_2} & \dots & S_{1,1}^{r_k} \\ S_{1,2}^{r_1} & S_{1,2}^{r_2} & \dots & S_{1,2}^{r_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i,j}^{r_1} & S_{i,j}^{r_2} & \dots & S_{i,j}^{r_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_k \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

$$Z' = S\kappa \quad (2.2.5)$$

図.2.2.1の場合、測定電極は 12 極存在するので、 i, j の全ての組み合わせは $(12 \times (12 - 1))/2 = 66$ 組となる。また、断層撮影対象領域は 312 個の領域に離散化されているので、 $k = 312$ となる。よって、Sensitivity 行列 S の縦は 66、横は 312 となる。式 (2.2.5) が、Sensitivity 行列法で一般的に用いられているシステム方程式である。

式 (2.2.5) には重大な問題点が含まれている。任意の媒質分布状態 κ におけるインピーダンス変化量 $Z'[\Omega]$ が Sensitivity 行列 S と、任意の媒質分布状態 κ との積で与えられるという考え方は疑問である。式 (2.2.5) は、複数の離散化領域で媒質変化が生じた場合、全体のインピーダンス変化量は、媒質変化が生じた離散化領域の Sensitivity 値の和であると表している。Sensitivity 値の和を取るということは、電気回路における抵抗の直列接続に相当す

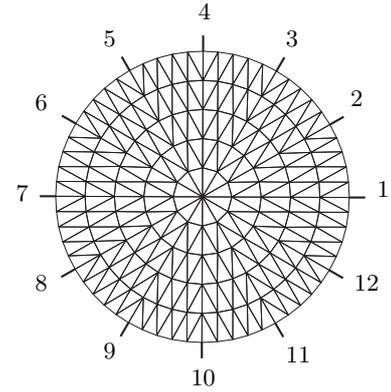


図 2.2.1: 基準状態の領域離散化と電極配置

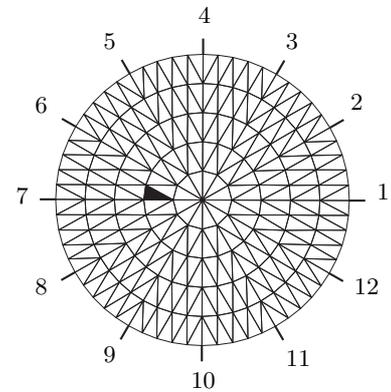


図 2.2.2: 媒質変化後の断層撮影領域

る。しかし、多くの場合の媒質分布におけるインピーダンスが各離散化領域の直列接続として考えられるわけではない。

Sensitivity 行列法は、このような非合理性を抱えた理論である。この非合理性を無くすためには、Sensitivity 値の合成法を正しく考えるか、領域を離散化した際に考えられる全ての媒質分布パターンを用意してパターンマッチングを行うかの二方法が考えられる。

Sensitivity 値の合成法を正しく考えるためには、あらかじめ媒質の配置状態を把握しておくことが必要である。電気回路で考えれば、抵抗が直列に配置されているのか、並列に配置されているのかが分かっていないと抵抗値の合成法則を正しく導くことができない。つまり、Sensitivity 値の合成法則を正しく考えること自体が、求めようとしている解を必要としているため、実現が非常に困難であると考えられる。

考えられる全ての媒質分布パターンを用意してパターンマッチングを行うという方法は、理論的には可能である。しかし、考えられる全ての媒質分布パターンは、断層撮影対象領域の離散化数 n に対して、式 (2.2.6) で表されるように指数関数的に増加するため、現実的には全ての媒質分布パターンを用意することは非常に困難である。

$$\text{Number of patterns} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{n!}{n-r!} \quad (2.2.6)$$

以上のことから、式 (2.2.5) で表わされる Sensitivity 行列法を解釈すると、条件付パターンマッチング法と考えることができる。インピーダンス変化量の合成法則が、Sensitivity 値の和で表現できるものとする非合理的な条件を課すことで、用意すべき媒質分布パターンを限定しているパターンマッチング法である。しかし、パターンマッチング法の解の精度は用意するパターン数に依存するという性質を考慮すると、このような条件を課さざるを得ないことは非常に重要な問題点と言える。すなわち、Sensitivity 行列法の最大の問題点はパターンマッチング法である事と言える。

式 (2.2.5) を用いて導電率分布 κ を求めるためには、 S の逆行列を Z' の左側からかけることになる。しかし、 S は一般的に正則ではないため、逆行列を求めることができない。したがって、この問題は不適切 (Illpose) な線形システム方程式を解く逆問題 (Inverse Problem) に帰する。逆問題解法として、GVSPM (Generalized Sampled Pattern Matching) 法が挙げられる。近年、村井や加川等によって提唱された Sensitivity 行列法へ GVSPM 法を適用した結果、Newton-Raphson 法や特異値分解法等よりも良好な結果が武居等や Dong 等によって報告されている [2, 3, 4, 5]。本論文では、式 (2.2.5) で表される不適切な線形システム方程式の解法として GVSPM 法を採用する。

このような、逆問題解法を介した結果を得ることから、Sensitivity 行列法と GVSPM 法を用いて導き出した結果は、解の正当性を数学的に証明することができない。そのため、導き出された結果は、“推定結果”と定義するものとする。

本論文では、式 (2.2.5) における Sensitivity 行列 S を構築するために、有限要素法 (Finite Element Method) によるシミュレーションを用いる。空間の離散化は三角形一次要素によって行う。つまり、推定対象の媒質分布の解像度は有限要素法で用いる空間の離散化メッシュの密度に依存することになり、トモグラフィーの結果として導出されるべき媒質の数は有限要素法における要素数と一致する。

電気インピーダンス・トモグラフィにおけるエネルギーは式 (2.2.7) のように表される。空間のエネルギー $P[J]$ 、電圧 $V[V]$ は有限要素法の結果から得ることができるので、式 (2.2.7) から断層撮影対象領域のインピーダンス $R[\Omega]$ を求めることができる。空間のエネルギー $P[J]$ は有限要素法における汎関数に対応し、電圧 $V[V]$ は電圧印加を行う二電極間の電位差に対応する。

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \quad (2.2.7)$$

以上のような理論の元、図.2.2.1における電極組み合わせ $i = 4, j = 8$ の場合の各離散化要素の Sensitivity 値を求めると、図.2.2.3のようになる。Sensitivity 値の算出には有限要素法を用いた。

図.2.2.3の結果は電圧を印加している電極付近で媒質が変化したときを表す Sensitivity 値が強く、それ以外は変化が少ない。電界系における空間の電圧分布は Poisson の方程式、Laplace の方程式などで表されるように、距離に対して二乗の減衰を示すことから、図.2.2.3の結果は妥当なものと考えられる。

図.2.2.3の状態では、Sensitivity 値の分布を把握しにくいので、Sensitivity 値の自然対数 \ln をとった結果を図.2.2.4に示す。

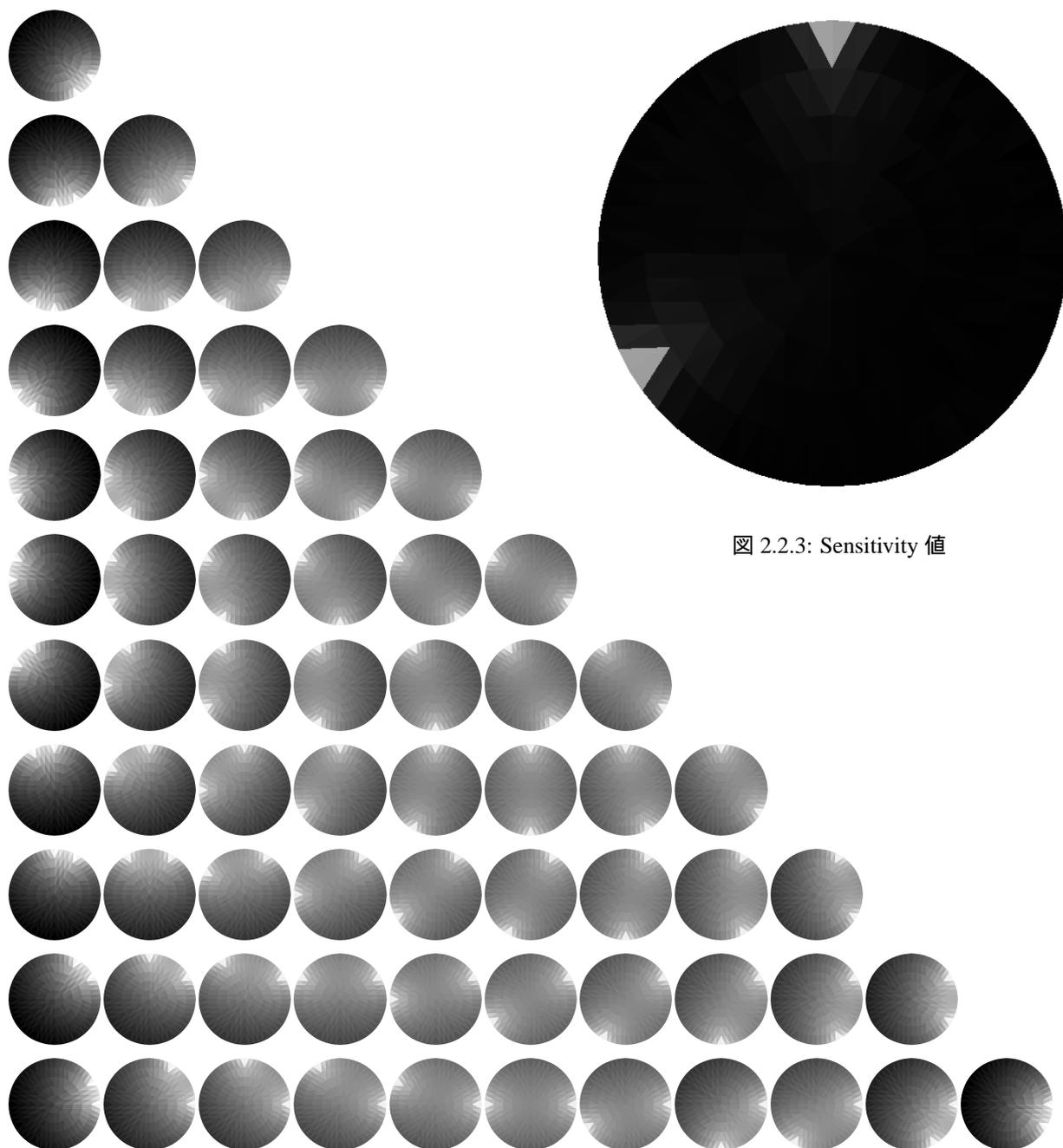


図 2.2.3: Sensitivity 値

図 2.2.4: 自然対数 \ln をとった Sensitivity 行列

2.3 電気双極子法

2.3.1 電気双極子法の概要

2.2において、関数型トモグラフィ理論として一般的な理論である Sensitivity 行列法には、根本的な問題点が存在することを述べた。そこで、本論文では新たな関数型トモグラフィ理論として、電気双極子法を提唱する。

電気双極子法では電気回路における、抵抗素子で生じる電圧降下を電気双極子として考える。そして、断層撮影対象内で生じた媒質変化に起因する電気双極子分布を断層撮影外周部から得られる電圧値を用いて推定する。つまり、電気双極子法は関数型トモグラフィにおける媒質分布推定問題を電気双極子分布推定問題に置き換えるものである。

電気双極子法の利点として、解とする電気双極子が作る周辺電圧分布に重ねの理が成立する事が挙げられる。断層撮影領域内に複数の電気双極子が存在する場合の電圧分布は、領域内に存在する電気双極子それぞれが作る電圧分布の和で表現することができる。このため、Sensitivity 行列法のようにパターンマッチング法に頼る必要はなく、理論的な非合理性を含むこともない。

一方、電気双極子法の欠点として、断層撮影対象への電流通電パターンを変えることが、システム方程式の解である電気双極子の配置を変化させてしまうことが挙げられる。簡単な例としては、電流の注入方向を入れ替えると、電流の方向は逆になり、電気双極子の方向も逆になる。このため、複数の電流通電パターンから得られた電圧情報を連立して用いることが困難である。

2.3.2 電気双極子による定式化

電気回路において、抵抗素子で生じる電圧降下は電圧源に対して逆方向にかかる起電力と考える事ができる。この起電力は逆起電力と呼ばれる。抵抗素子を微小な抵抗素子の集合と考えれば、抵抗素子における逆起電力は微小な逆起電力の集合と考えられる。微小な逆起電力は陽・陰電極の組み合わせであるから、電気双極子と考えられる。電気双極子は陽・陰電荷の極対である。よって、抵抗素子における逆起電力とは、電気双極子の集合であると考えることが可能である。

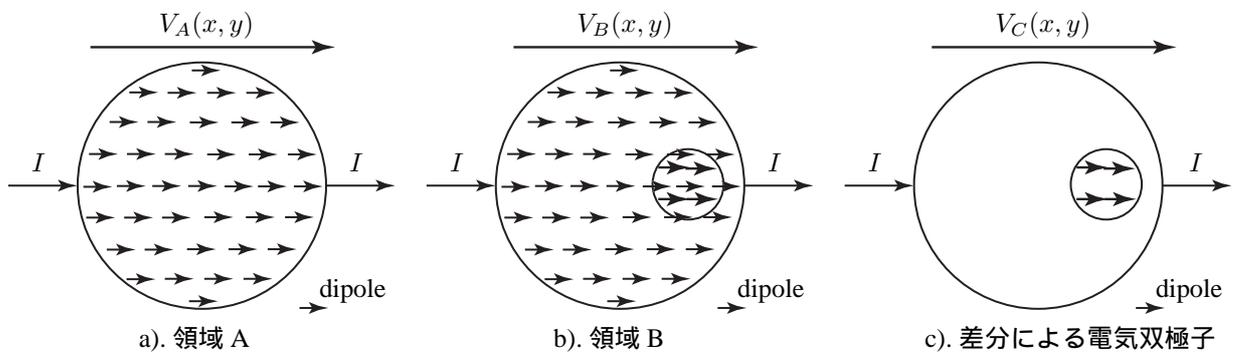


図 2.3.1: 媒質分布変化による逆起電力の模式図

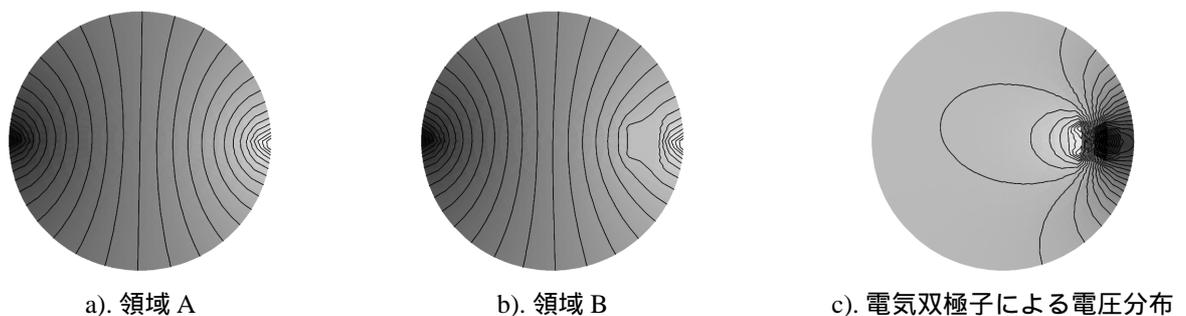


図 2.3.2: 媒質分布変化による電圧分布

図.2.3.1 a) に示す領域 A に対して電流 I [A] を注入した場合、領域内部には逆起電力分布 $V_A(x, y)$ [V] が生じる。同様に図.2.3.1 b) に示す領域 B に先ほどと等しい電流 I [A] を注入した場合、領域内部には逆起電力分布

$V_B(x, y)[V]$ が生じる．領域 B は領域 A 内の一部で媒質に変化が生じた状態である．領域 A の状態から領域 B の状態への導電率分布変化に起因する両者の逆起電力分布の相違 $V_C(x, y)$ は式 (2.3.1) で与えられる．この差分逆起電力分布 $V_C(x, y)$ は電気双極子の集合からなると考える．図.2.3.1での領域内部の電圧分布は図.2.3.2のようになっている．

$$V_B(x, y) - V_A(x, y) = V_C(x, y) \quad (2.3.1)$$

電気インピーダンス・トモグラフィの目的は，断層撮影対象領域外周部で測定される電圧分布から断層撮影対象領域内部の導電率分布を推定することにある．導電率分布の推定は，導電率変化によって生じる逆起電力分布 $V_C(x, y)$ が与える対象領域外周部電圧分布から電気双極子の位置と電気双極子の有する電荷の大きさを推定することと等価であるとする．すなわち，図.2.3.2 c) の差分電圧分布のうち，領域外周部の電圧値のみを用いて，図.2.3.1 c) に示される電気双極子の位置と電気双極子の有する電荷の大きさを求める．

このように，電気インピーダンス・トモグラフィの導電率パラメータ推定問題は，電気双極子の与える対象外周電圧分布から電圧源である電気双極子の位置を推定する問題に置き換えることが可能である [6, 7, 8, 9]．

Fig.2.3.3に示す電気双極子が作る電圧は式 (2.3.2) で与えられる．ここで， $V_P[V]$ は電荷 $Q[C]$ を有する電気双極子が距離 $r[m]$ 離れた任意の点 P に作る電圧である．また， $\epsilon[F/m]$ は空間の誘電率であり， $\delta[m]$ は電気双極子の有する陽極，陰極間の距離である．

$$V_P = \frac{Q\delta \cos \theta}{4\pi\epsilon r^2} \quad (2.3.2)$$

任意の離散化領域に存在する電気双極子は X 成分， Y 成分で構成されるものとする．図.2.3.4に示すように，任意の位置 i にのみ電気双極子 Q_i が存在する場合， Q_i が任意の測定点 j に作る電圧 $V_{ij}[V]$ は， Q_i の X 成分 Q_{ix} が作る電圧 $V_{ijx}[V]$ と Y 成分 Q_{iy} が作る電圧 $V_{ijy}[V]$ の和で表される．

同様に，任意の媒質分布状態における断層撮影対象領域外周電圧分布は対象領域内を離散化した複数点の電気双極子の X 成分， Y 成分が作る電圧分布の線形和であると考えられる．よって，対象領域外周部電圧分布は式 (2.3.2) を用いて，式 (2.3.4) で与えられる．ただし， $\delta = 4\pi\epsilon$ とする．

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11x} & G_{11y} & \cdots & G_{1mx} & G_{1my} \\ G_{21x} & G_{21y} & \cdots & G_{2mx} & G_{2my} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ G_{n1x} & G_{n1y} & \cdots & G_{nmx} & G_{nmy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1x} \\ Q_{1y} \\ \vdots \\ Q_{mx} \\ Q_{my} \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}\mathbf{Q} \quad (2.3.4)$$

$$G_{ijx} = \frac{\cos \theta_{ijx}}{r_{ij}^2} \quad (2.3.5)$$

$$G_{ijy} = \frac{\cos \theta_{ijy}}{r_{ij}^2} = \frac{\sin \theta_{ijx}}{r_{ij}^2} \quad (2.3.6)$$

求める電気双極子の電荷を，具体的な値ではなく，全ての電荷に対する割合とするならば，式 (2.3.4) において，電気双極子の電荷間距離 $\delta[m]$ ，空間の誘電率 $\epsilon[F/m]$ は G_{ijx} ， G_{ijy} 全てで共通成分となるので，具体的な値は考慮する必要がない．ただし， $\epsilon[F/m]$ は断層撮影対象領域内で均一であることが前提である．よって， $\delta = 4\pi\epsilon$ が成り立つ．

式 (2.3.4) のシステム方程式から求めるべきは断層撮影対象領域内の電気双極子の有する電荷分布 $Q[C]$ であるから， G の逆行列を周辺電圧値 $V[V]$ の左側に掛けることになる．ところが，対象領域外周に設置できる測定電極数は有限個に限定されるため，一般に行列 G は正則な行列にならない．したがって，この問題は不適切な線形システム方程式を解く逆問題に帰する．電気双極子法においても，Sensitivity 行列法の場合と同様に逆問題解法として GVSPM 法を採用する．

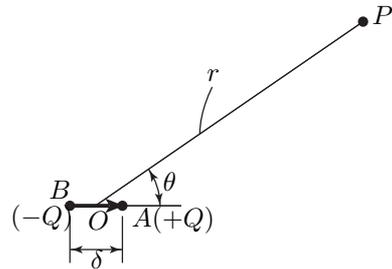
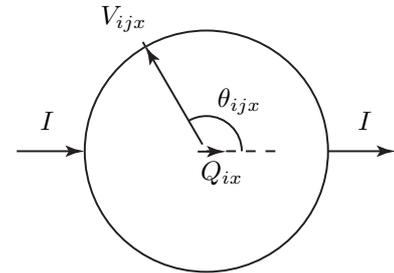
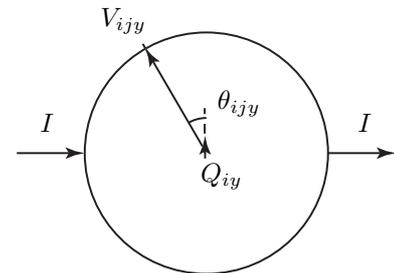


図 2.3.3: 電気双極子



a). X component of Dipole



b). Y component of Dipole

図 2.3.4: 外周部電圧を作る電気双極子成分

2.3.3 各測定データの扱いと畳み込み演算

Sensitivity 行列法では、複数の電圧印加電極の組み合わせから得られるインピーダンス値を用いて式 (2.2.5) のような一つのシステム方程式を構築した。ところが、電気双極子法では複数の電流注入電極の組み合わせから得られる断層撮影対象外周部電圧値を一つのシステム方程式にすることができない。

図.2.3.5のように断層撮影対象外周部に 12 極の電極が配置されているものとする。この電極を用いて、 I_1 - I_6 のような 6 パターンの電流印加を行うとする。この電流印加パターンを図.2.3.6 a) の媒質分布状態に適用すると、断層撮影対象領域内には、各電流パターン I_1 - I_6 に対し、図.2.3.6 b)-g) のような差分電気双極子分布が生じる。ここで、 I_1 のときの電流印加方向を基準角度 0° と定義する。

図.2.3.6 b)-g) は電流注入パターンを変化させたために、断層撮影対象領域内部での電流経路が異なる。逆起電力である電気双極子の配置される方向は電流の方向に依存する。よって、図.2.3.6 b)-g) に示されるように、各電流パターンについて、それぞれ異なる電気双極子分布が現れることとなる。

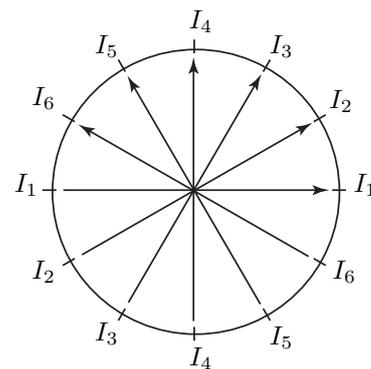


図 2.3.5: 断層撮影対象領域への電流注入パターン

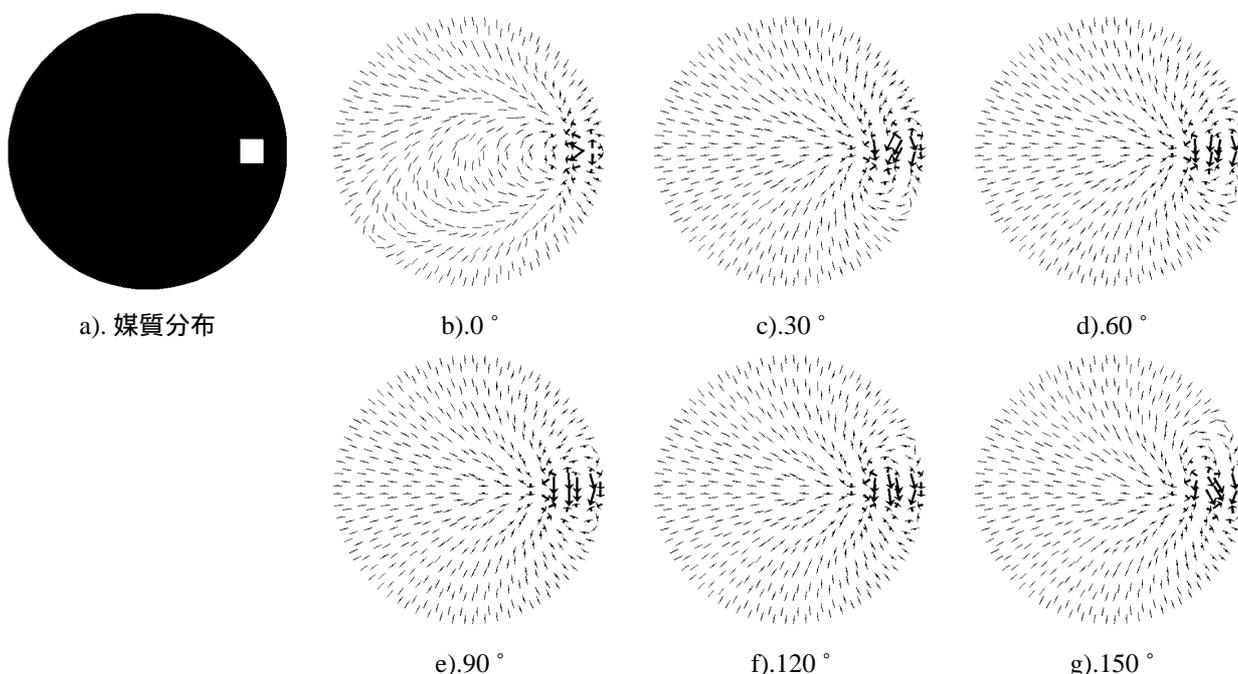


図 2.3.6: 媒質分布と差分電気双極子

式 (2.3.4) における電気双極子分布 Q が異なるということは、電流注入パターンを変化させて得られた断層撮影対象外周部電圧分布は、連立して解くことができない。求めるべき媒質分布が共通であるにも関わらず、断層撮影対象への複数の働きかけパターンの応答を連立することができないという点が電気双極子法の欠点である。

以上のように、式 (2.3.4) で表されるシステム方程式は、各電流注入パターンそれぞれに与えられる。本論文では、これらのシステム方程式をそれぞれ独立に解き、得られた複数の結果を用いて式 (2.3.7) であらわされる畳み込み演算 (convolution) を行う。畳み込み演算は解の共通部分を抽出するフィルタ演算であり、電流注入パターンを変えても、常に異なる導電率が検出される部分のみを抽出することによって、逆問題による解の信頼性向上を図るものである。

$$Z = Z_1 \otimes Z_2 \dots \otimes Z_{n/2} \quad (2.3.7)$$

対象領域内の電流分布を勘案すると、この畳み込みによる方法は、電極組み合わせ数を増やすことが、必ずしも解の精度を向上させることを意味しない。よって、可能な限りの電極組み合わせ数を取ることなく、測定電極 n 個に対して、電流注入パターン数は $n/2$ 個となるように電極組み合わせを設定する。図.2.3.5に示すように、対象領域外周部に電極が 12 個存在する場合、対象領域への電流注入パターンは 6 方向とする。

第3章 システム方程式の解法

3.1 逆問題の概要

第2章で述べた関数型トモグラフィ理論である，Sensitivity 行列法，電気双極子法は共に不適切なシステム方程式を伴うものであった．このような不適切なシステム方程式を解く問題を逆問題と定義する．

一般的に知られている逆問題の解法として，Newton-Raphson 法や特異値分解法などが挙げられるが，筆者等は逆問題解法として，GVSPM(Generalized Sampled Pattern Matching) 法を提唱してきた．GVSPM 法を Sensitivity 行列法へ適応した結果，Newton-Raphson 法や特異値分解法等よりも良好な結果が武居等や Dong 等によって報告されている．^[2, 3, 4, 5]

Newton-Raphson 法は非線形問題などでの零点を求める反復解法である．任意の点における関数の傾きを算出し，その接線と零線が交差する点を探し出す．更に，その点における関数の傾きを算出し，その接線と零線が交差する点を探し出す．この手順を繰り返すことで，任意の関数の零点 $f(x) = 0$ を探し出す理論である．

特異値分解法は任意のベクトル空間の最小ノルム解を求める手法である．特異値分解法で得られる解は，そのベクトル空間において，ベクトル空間面から伸びる垂直線と原点が交わったベクトル空間の位置を解とする．この点は任意のベクトル空間中で，最も原点に近い位置を表している．

Newton-Raphson 法の問題点は，任意の関数系で最初に傾きを調べる点をどこに設定するかが非常に重要な意味を持つ．この点を適切に選択することができなければ，何度反復を行っても，零点にたどり着くことはできなくなる．つまり，最初に傾きを調べる点である，初期値の選択に，何らかの理論を考える必要がある．

特異値分解法の問題点は，任意のベクトル空間において，求めるべき解は最も原点に近い解で良いのかということにある．この拘束条件が理論的に適切でなければ，この手法を用いることはできない．

筆者等が提唱してきた GVSPM 法は，ベクトル空間の内積を用いた反復解法である．Newton-Raphson 法のように，解に修正を加える手順を反復する．GVSPM 法の収束点は， $n - 1$ 回目の反復解ベクトルと， n 回目の反復解ベクトルの内積をとって，二つのベクトルが一致する点である．つまり，これ以上修正を加えても解ベクトルが変化しないベクトルを解と定義する．そして，二つのベクトルが一致しない時には，内積から二つのベクトルの差異を算出し，その情報を用いて解ベクトルを修正する．

GVSPM 法の利点は，Newton-Raphson 法のように解が初期値に依存することがなく，特異値分解法のように必ずしも適切とは言えない拘束条件を課すこともない点にある．

3.2 GVSPM 法

式 (3.2.1) において，行列 C が正則ではないとすると，ベクトル Y と C を用いて，ベクトル X を求めることは，逆問題となる．また，式 (3.2.1) は不適切な線形システム方程式と定義される．

$$Y = CX \tag{3.2.1}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

式 (3.2.1) において， X として正しい解が得られた場合， Y と CX の転置行列をかけたものは，ベクトル Y のノルムと等しくなる．

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \right\}^T \quad (3.2.3)$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i^2 = |Y| \quad (3.2.5)$$

式(3.2.3)は X が正しい場合に式(3.2.5)のように Y のノルムを求めたことになるが、 X が正しくない場合は X と Y の内積を求めたことになる。 X が正しくない場合、 Y と X の二つのベクトルがどのくらいの不一致を持っているのかを元にして、 X を修正する事とする。

ここで、 X, Y が二次元ベクトルであるとして考える。 X と Y が一致しない時、その原因は三点考えられる。一点目は、二つのベクトルの方向は同じなのだが、そのノルムが異なる場合。二点目は、二つのベクトルのノルムは等しいのだが、方向が異なる場合。三点目は二つのベクトルのノルムが異なり、方向も異なる場合。以上である。これら全てについて考慮して X を修正することは困難なので、GVSPM法ではノルムについては考慮しないことにする。つまり、 X, Y を正規化して内積をとることで、ベクトルの方向に関する一致性を評価する。評価結果から、 X の方向を修正することで Y に近づける。最終的に得られた X は、 Y と同じ方向を向いたベクトルとなり、 X のノルムを Y と行列 C を用いて修正すれば、正しい解が得られる。

式(3.2.3)を正規化すると、式(3.2.6)のようになる。

$$\frac{Y}{|Y|} \left[\frac{CX}{|CX|} \right]^T = Y' [C'X']^T \quad (3.2.6)$$

式(3.2.1)で、行列 C がベクトル C_i の集合だと考えると式(3.2.8)のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

$$Y = \sum_{i=1}^m X_i C_i \quad (3.2.8)$$

式(3.2.8)に対して Y を正規化すると、式(3.2.10)のようになる。

$$\frac{Y}{|Y|} = \sum_{i=1}^m \frac{|C_i|}{|Y|} X_i \frac{C}{|C_i|} \quad (3.2.9) \quad X'_i = \frac{|C_i|}{|Y|} X_i$$

$$Y' = \sum_{i=1}^m X'_i C'_i \quad (3.2.10) \quad X' = \begin{bmatrix} X'_1 & X'_2 & \dots & X'_m \end{bmatrix}^T$$

このように正規化したシステム方程式を式(3.2.11)のように表す。

$$Y' = C'X' \quad (3.2.11)$$

式(3.2.11)を用いて、 Y' のノルムと、 X' と Y' の内積を比較すれば、 X' と Y' の方向の不一致性を評価することができる。 X' と Y' が一致しない場合、不一致性を用いて X' の修正を次のように行う。

k 回反復した時の誤差ベクトル $\Delta Y^{(k)}$ は正しい解 Y と行列 C と $k-1$ 回反復で得られたベクトル $X^{(k)}$ によっ

て、式 (3.2.12) のように得ることが出来る .

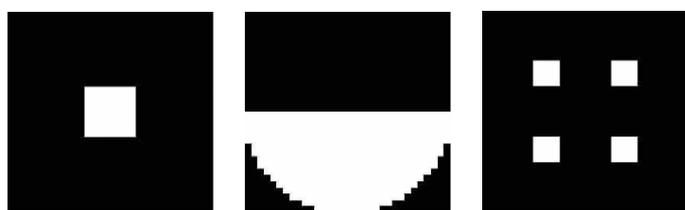
$$\begin{aligned} \Delta Y'^{(k)} &= Y' - \frac{C' X'^{(k-1)}}{|C' X'^{(k)}|} \\ &= C' \Delta X'^{(k)} \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

この誤差 $\Delta X'^{(k)}$ を $k-1$ 回反復で得られたベクトル $X'^{(k-1)}$ に足すことで修正を加える . ただし、式 3.2.12 において $\Delta X'^{(k)}$ を求めること自体が逆問題になってしまっている . そこで、 $\Delta X'^{(k)}$ は k 回反復での誤差ベクトル $\Delta Y'^{(k)}$ と、行列 C' の転置の積によって得られるものと仮定する .

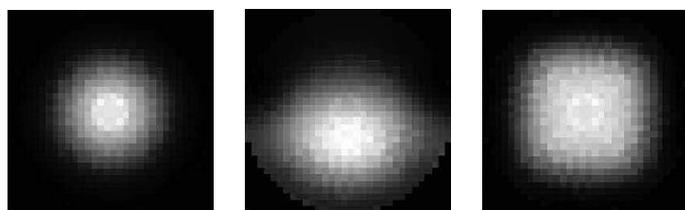
$$\begin{aligned} X'^{(k)} &= X'^{(k-1)} + \Delta X'^{(k)} \\ &= X'^{(k-1)} + C'^T \Delta Y'^{(k)} \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

これら一連の誤差の算出と修正を繰り返すことで X を正解に近づけていくことになる .

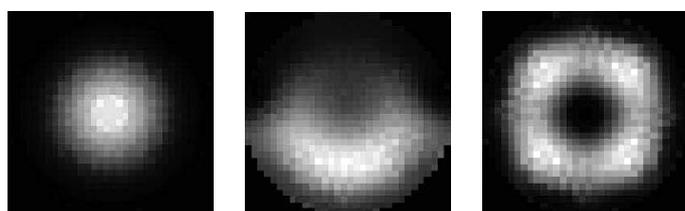
3.3 その他の逆問題解法との比較



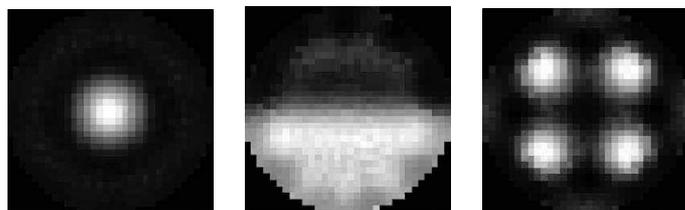
(a) Center (b) Bottom (c) Dispersion
(1) Model Medium Distribution



(a) Center (b) Bottom (c) Dispersion
(2) Reconstructed images by LBP



(a) Center (b) Bottom (c) Dispersion
(3) Reconstructed images by NR



(a) Center (b) Bottom (c) Dispersion
(4) Reconstructed images by GVSPM

筆者等が提唱してきた GVSPM 法と、一般的に知られている逆問題解法である LBP 法 (Linear Back Projection Method), NR 法 (Newton-Raphson Method) を用いた比較を行う [4] .

図.3.3.1 に示される比較は、円形領域での媒質分布を推定するシミュレーションである . 図.3.3.1 (2) の LBP 法, 図.3.3.1 (3) の NR 法による結果と比較して, 図.3.3.1 (4) に示される GVSPM 法による結果は, 図.3.3.1 (1) に示される正解の媒質分布に近いことが分かる . よって, 筆者等が提唱してきた GVSPM 法は, 一般的に知られている逆問題解法である LBP 法, NR 法よりも効果的な逆問題解法であると言える .

図 3.3.1: 逆問題解法のシミュレーションによる比較

第4章 関数型トモグラフィのシミュレーション法

4.1 有限要素法の概要

本論文では，第2章で述べた Sensitivity 行列法と電気双極子法について，シミュレーション及び実験によって理論の妥当性を検証するものである．本論文では，これらの検証を有限要素法を用いたシミュレーションによって行う．

有限要素法は空間の離散化の自由度が非常に高いシミュレーション方法である．最も基本的なシミュレーション法として差分法を挙げることができる．差分法における空間の離散化は，直交した格子状にしか行えず，各軸上での離散化点の配置は等間隔である必要がある．

一次元空間における数値シミュレーションは離散化点と離散化点の間を何らかの補間関数をもって補間して計算を行う．もっとも単純な補間法は一次関数による直線補間である．このような補間は二次元以上の空間においても同様に行われる必要がある．二次元平面空間において，差分法は前述のような規則正しい離散化点の配置を行うことで，補間されるべき空間の最小要素の面積が全て等しくなる．そのため，空間の補間関数は全領域で等しくなり，計算過程でこの補間関数を特別意識しなくても済むようになる．

一方，空間の離散化が自由に行える有限要素法では，一般的に離散化点の配置に規則性がないため，離散化点間を補間する関数がそれぞれの離散化点間で異なる．そのため，有限要素法では，これらの補間関数を考慮した計算を行う必要が出てくる．

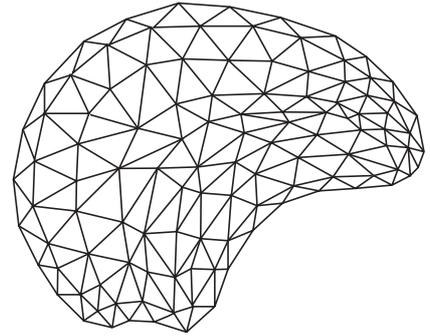


図 4.1.1: 有限要素法における離散化

有限要素法は，大きく二点の理論によって構成される．一点目は前述した空間の離散化に伴う空間補間手法である．二点目は，その系を表すエネルギー関数である．このエネルギー関数を汎関数 (Functional) と呼ぶ．汎関数とは，“関数の関数”と言われる．具体的には関数をパラメータとする関数である．汎関数は変分法で用いられる理論であり，有限要素法とは，自由度の高い空間離散化手法を伴った変分法だといえる．

4.2 Poisson の方程式と Laplace の方程式

本論文は，関数型トモグラフィの一手法である電気インピーダンス・トモグラフィについて，Sensitivity 行列法と電気双極子法という二つの理論の有効性について検証するものである．電気インピーダンス・トモグラフィは，断層撮影対象へ電流を流すという働きかけを行い，その応答を用いて断層撮影対象内部の媒質分布を推定することを目的とする．取得目的となる電流による働きかけに対する応答は，Sensitivity 行列法と電気双極子法で異なる．Sensitivity 行列法では断層撮影対象のインピーダンスを取得し，電気双極子法では断層撮影対象表面の電圧分布を取得する．

いずれの場合も，断層撮影対象への電流注入に対する断層撮影対象の応答は Poisson の方程式，Laplace の方程式で表現される．Poisson の方程式，Laplace の方程式は電界 $E[V/m]$ と電位 $V[V]$ の関係と，電界と誘電率 $\epsilon[F/m]$ ，電荷密度 $\rho[C/m^3]$ の関係の二つから導出される．

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (4.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (4.2.2)$$

$$\nabla \cdot \nabla V = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (4.2.3)$$

ここで、誘電率 ϵ [F/m] の分布が一様でないとする、式 (4.2.2) の ϵ には divergence 演算がかかることになり、方程式は次のようになる。

$$\nabla \bullet \epsilon \nabla V = -\rho \tag{4.2.4}$$

式 (4.2.4) を Poisson の方程式と呼ぶ。式 (4.2.4) で、空間中にエネルギーを供給している電荷 ρ を電圧の形で表現するなら、式 (4.2.5) のようになる。式 (4.2.5) を Laplace の方程式と呼ぶ。

$$\nabla \bullet \epsilon \nabla V = 0 \tag{4.2.5}$$

一般的に Laplace の方程式は Poisson の方程式における $\rho = 0$ であると説明されることが多いが、これは空間中にエネルギーを供給する電荷が全く存在しないことを表しているわけではない。空間中にエネルギー源となる電荷の存在もなく、強制的に与えられる電圧もなければ空間に何のポテンシャルの分布も生じないことは明白である。つまり、全ての V がゼロとなるポテンシャル平面が解となる。

Poisson の方程式は、空間中へエネルギーを供給する要因を電荷 ρ [C/m³] の形で表す。Laplace の方程式は空間中へエネルギーを供給する要因を電圧 V [V] の形で表したものである。よって、Poisson の方程式、Laplace の方程式は空間中へのエネルギー供給源の表現形式が異なるものであり、本質的には等価な方程式である。

また、これらの方程式は電界、電圧、誘電率、電荷密度の関係を組み合わせただけであり、式 (4.2.1)、式 (4.2.2) はそれぞれ電界の自然の振る舞いを表したものであるから、それらの組み合わせから導き出された Poisson の方程式、Laplace の方程式はポテンシャル、電圧の自然な振る舞いに付いて表したものであるといえる。

つまり、Laplace の方程式について言えば、ある点に電圧が印加されたとすると、その電圧が周囲のポテンシャルの分布をどう作るかということを表すことになる。

簡単のため、誘電率分布が一様であるとするなら、Laplace の方程式は式 (4.2.6) のように、誘電率の値に依存しない形になる。

$V_{i-1,j-1}$	$V_{i,j-1}$	$V_{i+1,j-1}$
$V_{i-1,j}$	$V_{i,j}$	$V_{i+1,j}$
$V_{i-1,j+1}$	$V_{i,j+1}$	$V_{i+1,j+1}$

$$\nabla^2 V = 0 \tag{4.2.6}$$

ここで、二次元空間においてラプラシアンを微分の形に展開すると、式 (4.2.7) のようになる。

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{4.2.7}$$

これを x 軸、 y 軸それぞれについて三点での差分近似を行うと次のようになる。ここで、 h 、 k はそれぞれ x 軸方向の離散化幅、 y 軸方向の離散化幅である。

$$\nabla^2 V = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{h^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{k^2} \tag{4.2.8}$$

図 4.2.1: 空間の離散化

このように、Laplace の方程式をそのまま差分近似で解くためには離散化が長方形、または正方形によってなされなければならない。また、三点の差分近似を取るときに、領域の境界面においてはその外側の値を 0 とする固定境界条件 (Dirichlet Boundary Condition) をとらざるをえないという問題も存在する。

さて、式 (4.2.6) を差分法による離散化ではなく、自由に離散化点を配置できるようにすることは非常に困難である。問題点は、Laplace の方程式がエネルギー関数ではなく、ポテンシャル関数であるという点にある。空間を構成するエネルギーに注目して考える手法の一つに変分法が挙げられる。次節では、変分法について述べる。

4.3 変分学

有限要素法は変分学という学問の発展形である．変分学とは汎関数 (functional) であらわされる，任意の系のエネルギーが最小，もしくは最大になる点を求める学問である．

Laplace の方程式はある電圧が印加された場合，ポテンシャルがその周囲にどのように分布するかを表した方程式であった．その分布の仕方は自然の成り行きそのものを表しており，自然界がエネルギー最小であることが最も安定しているということを考えると，Laplace の方程式によって導き出されるポテンシャル分布というのは空間のエネルギーが最小になる分布であるということになる．

汎関数とは簡単に言葉で説明すれば“関数の関数”である．例えば次のような曲線とその曲線の長さの関係を考えてみよう．この曲線は両端を固定された紐が取る形状を求めるといって問題で，カタナリー曲線（懸垂曲線）と呼ばれるものである．

両端を固定された紐は全体の重心が最も低い位置になる形状になると考えられる．つまり，曲線の形状を表す関数と，曲線の長さを表す関数と，その重心を表す関数によって，その重心座標が最も小さくなる曲線の形状が解となる．

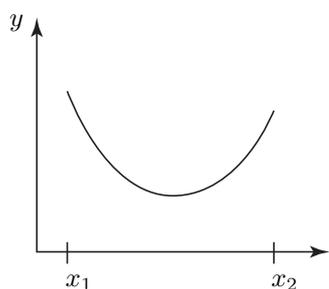


図 4.3.1: 曲線の長さを求める

まず，曲線の形状は $y(x)$ であらわされたとする．すると，曲線の長さは次のようになる．

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \{y'(x)\}^2} \quad (4.3.1)$$

$$m dx \quad (4.3.2)$$

$$= F_1[y'(x)] \quad (4.3.3)$$

また，曲線の重心は次のように表される．

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \{y'(x)\}^2} \quad (4.3.4)$$

$$m dx \quad (4.3.5)$$

$$= F_2[y(x), y'(x)] \quad (4.3.6)$$

ここで，曲線の長さが一定であるという条件の下，曲線の重心を最小にするというのが解くべき問題である．曲線の重心をあらわす関数 F はパラメータに曲線の形状を表す関数 $y(x)$ と，その微分をとっている．つまり，関数の関数なわけである．これを汎関数と定義する．

この汎関数について最大値もしくは最小値を求めるとすると，そこは少なくとも極値であることは保障される．通常の関数 $f(x)$ における極値とは微分の値がゼロである，すなわち， $\frac{m df(x)}{m dx} = 0$ である．汎関数についても微分のようなものを定義する必要がある．

まず，微分の定義に戻って考えたい．関数の微分はパラメータがある値 x であるときの関数の値 $f(x)$ とパラメータが微小量 Δx だけ移動した時の関数の値 $f(x + \Delta x)$ の差を変化した微小量 Δx で割ったもので，その微小量を更に無限に小さくしたものを言う．

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f' \quad (4.3.7)$$

ここで，パラメータの微小変化によって出る関数の値の差 Δf を関数の増分と定義する．

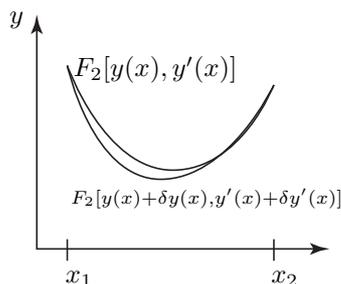


図 4.3.2: 形状関数の微小変化

関数の増分に対し，汎関数には変分なるものを定義する．関数の増分はパラメータである独立変数が微小変化した場合を考えたいが，汎関数のパラメータは関数であり，この例では曲線の形状の微分 $y'(x)$ である．汎関数における微小変化はどう定義するべきかと考えれば，曲線の形状を表す関数が微小変化したと考えるべきだろう．つまり，汎関数の変分は次のように定義することができる

$$\delta F = F[y(x) + \delta y(x), y'(x) + \delta y'(x)] - F[y(x), y'(x)] \quad (4.3.8)$$

ここで，一つ微分に関するテクニックを導入する．

式(4.3.7)で、増分 Δf は次のように表すことができる。ここで、微小変化 Δx は $\Delta x \rightarrow 0$ とされているものとする。

$$\Delta f = f' \Delta x \quad (4.3.9)$$

パラメータ x の微小変化量を $\alpha \Delta x$ と定義し、 Δx の値は固定したまま、任意の変数 α を導入したとする。すると、パラメータが微小変化した後の値は次のように表される。

$$f(x + \alpha \Delta x)$$

この式を α について微分したのち、 $\alpha = 0$ とすると、式(4.3.9)の増分と同じ答えが出てくる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \Big|_{\alpha=0} &= f'(x + \alpha \Delta x) \Delta x \Big|_{\alpha=0} \\ &= f'(x) \Delta x \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

式(4.3.10)は式(4.3.9)と等しい。つまり、増分 Δf は任意のパラメータ α についての微分によっても求めることが可能である。

これと同等の手法で汎関数の変分について求めたいのだが、ここからは汎関数のパラメータは $y(x)$ であるとして考える。もちろん、 $y'(x)$ を含む汎関数にも変分は存在するのだが、 $y'(x)$ を含む汎関数の変分はある条件を付けて考える必要性があるため、ここではそれを避けたいと思う。

先に示したこれから使用する電気工学における汎関数は $y(x)$ をパラメータとしており、関数の微分を含むパラメータは存在しないので、この先、 $y'(x)$ をパラメータとする汎関数の変分を考える必要はない。

では、ここで改めて汎関数を式(4.3.11)のように定義する。

$$F[y(x)] \quad (4.3.11)$$

これについて α を用いて関数の増分を求めたのと同様に汎関数の変分を求めると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F[y(x) + \alpha \delta y(x)] \Big|_{\alpha=0}$$

ここで、 $z = y(x) + \alpha \delta y(x)$ として考え、 $\alpha = 0$ の時、 $z = y(x)$ 、 $\partial z / \partial \alpha = \delta y(x)$ であるから、

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial F[y(x)]}{\partial y(x)} \delta y(x) \quad (4.3.12)$$

ここで、関数の増分と汎関数の変分を並べて対応を確認しておく。

$$\Delta f = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Delta x \quad (4.3.13)$$

$$\delta F = \frac{\partial F[y(x)]}{\partial y(x)} \delta y(x) \quad (4.3.14)$$

さて、変分法によって求めたかったのは汎関数が最大になる、もしくは最小になる場合である。すなわち汎関数の極値を求めることを目的とする。通常関数ならば微分、もしくは増分がゼロであるということである。汎関数に対しても同様に変分がゼロになれば極値を求めたことになる。つまり、式(4.3.14)がゼロになる関数 $y(x)$ が解となる。ここで、関数の微小変化 $\delta y(x)$ は任意であるから、変分がゼロになるということは汎関数 $F[y(x)]$ の微分がゼロであることと等価である。

$$\frac{\partial F[y(x)]}{\partial y(x)} = 0 \quad (4.3.15)$$

変分法は汎関数 F がパラメータに $y(x)$ のみを持っている場合、汎関数 $F[y(x)]$ を関数 $y(x)$ で微分したものがゼロであるときが汎関数の極値であることを導いた。しかし、これはあくまで極値であって、極値が汎関数の最大であるか最小であるか、最大でも最小でもなく数ある極値の内の一つであるかなどの判断については言及していない。

極値が複数あるかどうかは微分した結果を見れば判断できる。極値が複数ある簡単な例を次に示そう。

$$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta$$

$\cos \theta$ の θ についての微分は $-\sin \theta$ となる．これの極値は $-\sin \theta = 0$ で、 θ は複数存在することになる．つまり、微分した結果がゼロとなる条件が複数存在しない限り、極値は一意的であると言える．

極値が一意的であるとして、それが最大であるか最小であるかを判断するには、通常関数では二回微分した値が正であるか負であるかを求めればよい．

運動方程式において位置を表す関数の時間に関する一回微分は速度に、二回微分とは加速度にあたる．つまり、一回微分がゼロであると言うことは静止していることになり、二回微分は、次の時間、もしくは直前の時間において速度が上がるか下がるかを示すことになる．よって、二回微分が負であれば一回微分が最大値を表していることになり、二回微分が正であれば一回微分が最小値であることを表すことになる．

これと同様のことが汎関数についても言える．式 (4.3.15) を第一変分と言い、通常関数の一回微分にあたる．同様に、通常関数の二回微分にあたるものとして第二変分と言うものが存在する．これを用いれば第一変分が最大であるか最小であるかの判断ができる．

しかし、これから求める電気工学で用いる主要な汎関数の極値はエネルギーが最小の場合でしかありえない．つまり、必ずしも第二変分を用いなくても汎関数の極値さえ求められればそれがエネルギーの最小値だといえる．よって、ここでは第二変分についての議論はしないことにする．

4.4 汎関数の導出

前節で汎関数の意味と汎関数の極値を求めるための方法を述べた．次に、電気工学で用いられる汎関数の導出を考えたい．今解きたい問題は Laplace の方程式であり、Laplace の方程式は空間のエネルギーを最小にするようなポテンシャル分布を表した方程式である．つまり、汎関数は空間のエネルギーを表したものであるはずである．

ここでは、全て二次元系について考えるものとする．

4.4.1 電界系汎関数

電界系に関するエネルギーは電界に起因する単位体積あたりのエネルギー \mathcal{L}_E [J/m^3] と、電荷に起因する単位体積あたりのエネルギー \mathcal{L}_ρ [J/m^3] が考えられる．つまり、二つのエネルギー密度を空間全体にわたって積分したものが全エネルギーということになる．

$$F(\phi) = \int_S (\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_\rho) ds \quad (4.4.1)$$

まず、電界に起因する単位体積あたりのエネルギー \mathcal{L}_E について考える．電界と電荷の間に働くエネルギーは

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} & (4.4.2) \\ w &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \\ &= q \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= qV & (4.4.3) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} : \text{力 [N]} \\ \mathbf{E} : \text{電界 [V/m]} \\ q : \text{電荷 [C]} \\ w : \text{エネルギー [J]} \\ V : \text{電位差 [V]} \end{array} \right.$$

電界に関する空間中の全エネルギーは次のように表される

$$w = \frac{1}{2} \sum V_i Q_i \text{ [J]} \quad (4.4.4)$$

電界に関する空間中のエネルギーの単位体積あたり、つまり \mathcal{L}_E [J/m^3] は次のように表される．

$$\begin{aligned} \frac{w}{\Delta v} &= \frac{1}{2} V Q \frac{1}{\Delta v} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V}{\Delta l} \frac{Q}{\Delta s} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} : \text{電界 [V/m]} \\ \mathbf{D} : \text{電束密度 [C/m}^2\text{]} \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 & (4.4.5) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{D}^2 \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (4.4.6)$$

電荷に起因する単位体積あたりのエネルギー \mathcal{L}_ρ [J/m³] は式 (4.4.3) より次のようになる。ただし, ρ : 電荷密度 [C/m³], ϕ : 電位 [V] であり, ρ が単位体積あたりの電荷となっているので $\rho\phi$ は自動的に単位体積あたりになる。ただし, このエネルギー分というのは一種のポテンシャルエネルギーであるため, 符号は負となる。

$$\mathcal{L}_\rho = -\rho\phi \quad (4.4.7)$$

以上をあわせて式 (4.4.1) に代入すると, 式 (4.4.8) のように電界系汎関数が導出される。

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \int (\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_\rho) ds \\ &= \int \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 ds - \int \rho \phi ds \\ &= \frac{1}{2} \int \epsilon (\nabla \phi)^2 ds - \int \rho \phi ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \{ \epsilon (\nabla \phi)^2 - 2\phi\rho \} ds \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

4.4.2 導電率を含む電界系汎関数

電界系汎関数において電流通電による抵抗消費エネルギー \mathcal{L}_R [J/m³] も考慮すると, 次のようになる。

$$F(\phi) = \int_S (\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\rho) ds \quad (4.4.9)$$

抵抗での消費エネルギー \mathcal{L}_R [J/m³] はオームの法則などから以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} & (4.4.10) \\ &= \kappa \mathbf{E}^2 & (4.4.11) \\ &= \kappa (\nabla \phi)^2 & (4.4.12) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} : \text{電流密度 [A/m}^2\text{]} \\ \mathbf{E} : \text{電界 [V/m]} \\ \kappa : \text{導電率 [S/m]} \\ \phi : \text{電圧 [V]} \end{array} \right.$$

よって, 抵抗での電力消費も考慮した電界系汎関数は式 (4.4.13) のように表すことができる。

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \int (\mathcal{L}_E + \mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\rho) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \{ \epsilon (\nabla \phi)^2 + 2\kappa (\nabla \phi)^2 - 2\phi\rho \} ds \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

4.4.3 磁界系汎関数

磁界系に関するエネルギーは磁界に起因する単位体積あたりのエネルギー χ_B [J/m³] と, 電流に起因する単位体積あたりのエネルギー χ_J [J/m³], ベクトルポテンシャル \mathbf{A} [Wb/m] によって表される。

$$F(\mathbf{A}) = \int (\chi_B + \chi_J) ds \quad (4.4.14)$$

電界系と磁界系を $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$ として変換すると, 磁界に起因する単位体積あたりのエネルギー χ_B [J/m³] は

$$\begin{aligned} \chi_B &= \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 & (4.4.15) \\ &= \frac{1}{2} \nu \mathbf{B}^2 & (4.4.16) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H} : \text{磁界 [A/m]} \\ \mathbf{B} : \text{磁束密度 [Wb/m}^2\text{]} \\ \mu : \text{透磁率 [H/m]} \\ \nu : \text{磁気抵抗率 [m/H]} \end{array} \right.$$

電流に起因する単位体積あたりのエネルギー χ_J [J/m³] は次のようになり, 以上の式 (4.4.16), 式 (4.4.16) をあわせて式 (4.4.14) に代入すると, 式 (4.4.19) のように汎関数が導き出される。

$$\chi_J = -J_0 \frac{d\phi}{dl} \quad (4.4.17)$$

$$\begin{aligned} &= -J_0 \frac{d}{dl} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= -J_0 \frac{d}{dl} \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= -J_0 \frac{d}{dl} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dl \\ &= -J_0 A \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= \int (\chi_B + \chi_J) ds \\ &= \int \frac{1}{2} \nu \mathbf{B}^2 ds - \int J_0 \mathbf{A} ds \\ &= \frac{1}{2} \int \nu (\nabla \times \mathbf{A})^2 ds - \int J_0 \mathbf{A} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \{ \nu (\nabla \times \mathbf{A})^2 - 2J_0 \mathbf{A} \} ds \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

4.4.4 汎関数の一般的な表記

これらの Laplace の方程式を表す汎関数は電気工学のみで用いられるものではなく、建築材料のたわみ計算など力学系などでも用いられることがある。そこで、Laplace の方程式を表す汎関数をより一般的な形で表記すると次のようになる。ここで、 λ は Medium Parameter(媒質のパラメータ)、 ϕ は Potential、 ρ は Source Density(ポテンシャルの源となるエネルギーの密度)である。

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \{ \lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma \} ds \quad (4.4.20)$$

4.5 電界系汎関数と Poisson の方程式

ここでは電界系汎関数の第一変分が Poisson の方程式を同次 Neumann 条件 (Homogenous Neumann condition), すなわち、自由境界条件の元に解くことになるということ等価であることを示す。

第一変分は式 (4.3.12) を導出する時にはパラメータ α について微分したのだが、ここでは極限として展開することにする。ここで、電界系汎関数のパラメータ ϕ の微小変化を表す関数を ν と定義することにする。

まず、パラメータ ϕ の微小変化後を $\psi = \phi + \alpha\nu$ とし、汎関数を展開すると次のようになる。

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_S \{ \lambda (\nabla \psi)^2 - 2\psi \sigma \} ds \quad (4.5.1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_S \left[\lambda \left\{ \nabla(\phi + \alpha\nu) \right\}^2 - 2(\phi + \alpha\nu)\sigma \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \{ \lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma \} ds + \alpha \int_S (\lambda \nabla \phi \cdot \nabla \nu - \nu \sigma) ds + \frac{\alpha^2}{2} \int_S \lambda (\nabla \nu)^2 ds \\ &= F(\phi) + \alpha \int_S (\lambda \nabla \phi \cdot \nabla \nu - \nu \sigma) ds + \frac{\alpha^2}{2} \int_S \lambda (\nabla \nu)^2 ds \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

ここで、変分をパラメータ α の微分ではなく極限として展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta F &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(\psi) - F(\phi)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(\phi + \alpha\nu) - F(\phi)}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\int_S (\lambda \nabla \phi \cdot \nabla \nu - \nu \sigma) ds + \frac{\alpha}{2} \int_S \lambda (\nabla \nu)^2 ds \right] \\ &= \int_S (\lambda \nabla \phi \cdot \nabla \nu - \nu \sigma) ds \end{aligned}$$

この式を Green の公式を用いて書き換える。Green の公式とは面積分と線積分の関係、または体積分と面積分の関係を表す式で、次のように Gauss の法則にもとづいている。

Gauss の法則とはある閉空間に存在する全電荷の総和はその閉空間の表面から垂直に出て行く電界の和と等しいというエネルギー保存則である． \mathbf{n} は閉空間表面の垂直方向単位ベクトルである．

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{\epsilon} \sum Q \quad (4.5.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho \, dV \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV \\ &= \frac{1}{\epsilon} \int_V \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV \\ &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

これは三次元系であるが，二次元の場合は次のようになる．

$$\int_S \nabla \cdot \mathbf{E} \, ds = \int_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (4.5.5)$$

ここでベクトル \mathbf{E} を $\nu \nabla \phi$ とするなら，

$$\nabla \cdot (\nu \nabla \phi) = \nabla \nu \cdot \nabla \phi + \nu \nabla^2 \phi \quad (4.5.6)$$

$$\begin{aligned} \int_S \{\nabla \nu \cdot \nabla \phi + \nu \nabla^2 \phi\} \, ds &= \int_C \nu \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, dl \\ \int_S \nabla \nu \cdot \nabla \phi \, ds &= - \int_S \nu \nabla^2 \phi \, ds + \int_C \nu \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, dl \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

これを先ほどの汎関数の第一変分に代入すると，

$$\begin{aligned} \int_S (\lambda \nabla \phi \cdot \nabla \nu - \nu \sigma) \, ds &= \lambda \int_S \nabla \phi \cdot \nabla \nu \, ds - \int_S \nu \sigma \, ds \\ &= -\lambda \int_S \nu \nabla^2 \phi \, ds + \lambda \int_C \nu \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, dl - \int_S \nu \sigma \, ds \\ &= - \int_S \nu (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) \, ds + \int_C \lambda \nu \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \, dl \\ &= - \int_S \nu (\lambda \nabla^2 \phi + \sigma) \, ds + \int_C \lambda \nu \frac{\partial \phi}{\partial n} \, dl \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

ここで， $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ は $\nabla \phi$ の法線方向 \mathbf{n} 成分を求める演算であり， $\nabla \phi$ と \mathbf{n} の内積である．それがなぜ $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ になるかを考えるには，例えばベクトルの内積について考えることで理解できる．

例えば $x - y - z$ 三次元直交座標系に次のような関数 F が存在する時，その i 方向成分を求めるとすると次のようにベクトル F と単位方向ベクトル \mathbf{i} との内積を取ることになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} &= ax\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + by\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + cz\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \\ &= ax \end{aligned}$$

ここで，一般的な記号のつけ方として $x - y - z$ 三次元直交座標系のそれぞれの単位方向ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とおいたわけであるが，これらの記号のつけ方は任意であり，記号を単位方向ベクトルのアルファベットにあわせて三次元直交座標系のそれぞれの軸を $i - j - k$ とすることに全く問題はないわけである．

この表記によって先のベクトル F から単位方向ベクトル \mathbf{i} 方向成分を求めるとすると，次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= ai\mathbf{i} + bj\mathbf{j} + ck\mathbf{k} \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} &= ai\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + bj\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + ck\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \\ &= ai \end{aligned}$$

つまり、 $\nabla\phi \cdot \mathbf{n}$ は、 ϕ を l, m, n の直交座標系で考えると、次のように目的の変形ができるわけである。

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial l}\mathbf{l} + \frac{\partial\phi}{\partial m}\mathbf{m} + \frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n} \\ \nabla\phi \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial\phi}{\partial l}\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial\phi}{\partial m}\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial\phi}{\partial n}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial n}\end{aligned}$$

このようにして求められた第一変分の変化率がゼロの 때가極値であるから、

$$-\int_S \nu(\lambda\nabla^2\phi + \sigma) ds + \int_C \lambda\nu \frac{\partial\phi}{\partial n} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4.5.9)$$

よって、最終的には上記に示す第一変分は次のように Poisson の方程式を同次 Neumann 条件 (Homogenous Neumann condition) の元に解くこと等価であるということになる。

$$\begin{cases} \lambda\nabla^2\phi + \sigma = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

このことから、第一変分が Poisson の方程式を解くことと等価であることが保証されるので、求めた極値が最小値であることもまた保証されることになる。よって、必ずしも第二変分の正負を調べなくとも構わないということになる。

4.6 一次三角要素による空間の離散化

電界系汎関数は求まった。ここまでは変分学の領域である。次にここでは空間を一次三角要素と呼ばれる三角形で離散化する。そして、離散化した空間と汎関数を結びつけて Laplace の方程式を解くことこそが有限要素法である。

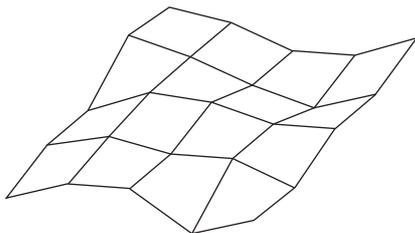


図 4.6.1: 差分法の Potential 面

差分法によるポテンシャル面の例を三次元的に表すと図4.6.1のようになる。これは離散化された離散化点間が等間隔であり、 x 軸、 y 軸が直交していることからそれぞれの軸が独立して一次関数で近似されていることになる。また、離散化点間のポテンシャルは一次関数により表すことができる。簡単に言えば、離散化点から離散化点へは直線によって表されているということである。

差分法の問題点は離散化点間が等間隔であり、 x 軸、 y 軸が直交していなければならないという制約があることである。有限要素法においてはこの離散化の制約をなくし、自由な形状をもって空間の離散化を行う。

差分法は上記の制約があったために、離散化点間の補間法則は自動的に決まり、どの離散化点間においてもその法則は共通である。有限要素法においては離散化点の配置に関する制約をなくしてしまったために離散化点間の補間法則は離散化点同士それぞれによって異なる。つまり、空間の補間法則をそれぞれの離散化点の間で明確に表現しておく必要がある。

一次元空間の離散化であれば単純に離散化点間の法則を示せばよいが、二次元空間の場合には離散化点を組み合わせた面について補間法則を明示しなくてはならない。差分法においては x 軸、 y 軸が直交していたために、それぞれの方向を独立して決定して何ら問題はなかった。そのため、面についての補間法則というものを意識する必要がなかったが、 x 軸、 y 軸が直交していない場合、それぞれの軸について相関が生じるため、必ず「面」についての補間法則が必要になる。

まず、離散化点は空間内に自由に配置できるものとする。この時、任意の離散化点間の補間法則を定める必要がある。一次元空間においてならば、連続する離散化点を $n+1$ 点グループ化することによって n 次近似を行う

ことができる．一次元空間での離散化点間近似を考えると次のようになる．

$$\begin{aligned}
 \text{一次近似} & \quad y = \alpha + \beta x \\
 \text{二次近似} & \quad y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \\
 \text{三次近似} & \quad y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}$$

これらの近似は既知の値 y が与えられて傾き $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ などを求めて既知の値 y の間を補間することになるわけであるが，一次近似であれば既知の値 y が最低二点なければ傾き α を求めることができず，二次近似であれば既知の値 y が三点必要で，三次近似であれば四点必要となる．

これを二次元について考えると次のようになる．

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \dots \tag{4.6.1}$$

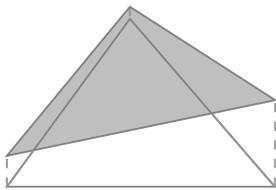


図 4.6.2: 一次三角形要素

この式の傾き成分 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を求めるには既知の値 ϕ が三つ必要である．よって，離散化点が三つ必要である三角形の領域であればこれらを特定することができるということで，三項を選ぶ必要がある．

空間の離散化は離散化点の配置によって行われているのだが，離散化点間の補間が行われることで，結果的には三角形が空間を埋め尽くしたような形になる．よって，有限要素法においてこの三角形の領域を要素と名付けて，離散化点よりもこの要素を主体的にあつかう．そして，上記のような三角領域面が平面で近似される要素を一次三角要素と呼ぶ．

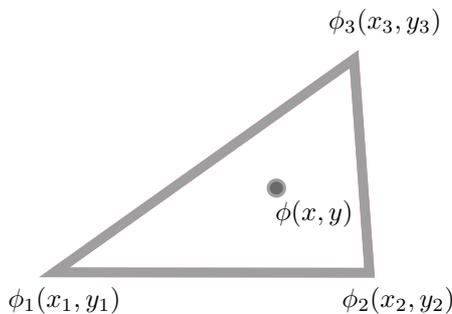


図 4.6.3: 三角要素

図 4.6.3 のような一次三角要素があったとすると，領域内の傾きは次のように求めることができる．

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{4.6.3}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \tag{4.6.4}$$

この傾きを用いて一次三角要素内の任意の座標 (x, y) でのポテンシャルは次のように表される．

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \tag{4.6.5}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} C^{-1} \phi \tag{4.6.6}$$

ここで， C^{-1} は次のようになる． Δ は三角要素の面積である． $\det C = 2\Delta$ については 4.10 において詳述する．

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & -(y_3 - y_2) & (x_3 - x_2) \\ -(x_1 y_3 - x_3 y_1) & (y_3 - y_1) & -(x_3 - x_1) \\ (x_1 y_2 - x_2 y_1) & -(y_2 - y_1) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.6.7}$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \tag{4.6.8}$$

式 (4.6.6) に式 (4.6.8) を代入すると,

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 b_1 & \phi_2 b_2 & \phi_3 b_3 \\ \phi_1 c_1 & \phi_2 c_2 & \phi_3 c_3 \\ \phi_1 d_1 & \phi_2 d_2 & \phi_3 d_3 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \{(\phi_1 b_1 + \phi_2 b_2 + \phi_3 b_3) + x(\phi_1 c_1 + \phi_2 c_2 + \phi_3 c_3) + y(\phi_1 d_1 + \phi_2 d_2 + \phi_3 d_3)\} \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^3 \phi_i (b_i + c_i x + d_i y) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \phi_i a_i
 \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

ここで, a_i は式 (4.6.10) のように表される.

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2\Delta} (b_1 + c_1 x + d_1 y) \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y\} \\
 a_2 &= \frac{1}{2\Delta} (b_2 + c_2 x + d_2 y) \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \{(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y\} \\
 a_3 &= \frac{1}{2\Delta} (b_3 + c_3 x + d_3 y) \\
 &= \frac{1}{2\Delta} \{(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y\}
 \end{aligned} \right\} \tag{4.6.10}$$

このようにして空間の離散化が行われた.

4.7 汎関数と一次三角要素

空間のエネルギーを表す汎関数と, 空間の離散化手法として一次三角要素の二つがそろった. 次には, 汎関数を一次三角要素により離散化することが必要である.

ここでの数式展開ではいくつかの項目の説明を後回しにしている. それらの項目の説明にはそれなりの紙面数が必要となるため, ここでの数式展開の中に混ぜると全体の流れが分かりづらくなるだろうと言う判断から, このような構成をとることにした.

汎関数は次のような関数であった.

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \{\lambda(\nabla\phi)^2 - 2\phi\sigma\} ds$$

ここで離散化されるべきは空間に存在するポテンシャル ϕ である. ϕ は式 (4.6.9) で表されているから, これらを汎関数に代入することで汎関数の離散化が実現できる.

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i a_i \quad (4.7.1)$$

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i \nabla a_i \quad (4.7.2)$$

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \{\lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi\sigma\} ds \quad (4.7.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_S \lambda \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \phi_i \phi_j \nabla a_i \nabla a_j ds - \int_S \sum_{i=1}^3 \phi_i a_i \sigma ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \lambda (\phi_1 \phi_1 \nabla a_1 \nabla a_1 + \phi_1 \phi_2 \nabla a_1 \nabla a_2 + \phi_1 \phi_3 \nabla a_1 \nabla a_3 \\ &\quad + \phi_2 \phi_1 \nabla a_2 \nabla a_1 + \phi_2 \phi_2 \nabla a_2 \nabla a_2 + \phi_2 \phi_3 \nabla a_2 \nabla a_3 \\ &\quad + \phi_3 \phi_1 \nabla a_3 \nabla a_1 + \phi_3 \phi_2 \nabla a_3 \nabla a_2 + \phi_3 \phi_3 \nabla a_3 \nabla a_3) ds - \int_S (\phi_1 a_1 + \phi_2 a_2 + \phi_3 a_3) \sigma ds \\ &= \frac{1}{2} \int_S \lambda \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\nabla a_1)^2 & \nabla a_1 \nabla a_2 & \nabla a_1 \nabla a_3 \\ \nabla a_1 \nabla a_2 & (\nabla a_2)^2 & \nabla a_2 \nabla a_3 \\ \nabla a_1 \nabla a_3 & \nabla a_2 \nabla a_3 & (\nabla a_3)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

$$- \int_S \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \sigma ds \quad (4.7.5)$$

ここで、 $(\nabla a_i)^2$ 、 $\nabla a_i \nabla a_j$ について考えると、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (4.7.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla a_1 &= \frac{1}{2\Delta} \{(y_2 - y_3)\mathbf{i} + (x_3 - x_2)\mathbf{j}\} \\ \nabla a_2 &= \frac{1}{2\Delta} \{(y_3 - y_1)\mathbf{i} + (x_1 - x_3)\mathbf{j}\} \\ \nabla a_3 &= \frac{1}{2\Delta} \{(y_1 - y_2)\mathbf{i} + (x_2 - x_1)\mathbf{j}\} \end{aligned} \right\} \quad (4.7.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla a_1 \bullet \nabla a_2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)\} \\ \nabla a_2 \bullet \nabla a_3 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)\} \\ \nabla a_3 \bullet \nabla a_1 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)\} \\ (\nabla a_1)^2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2\} \\ (\nabla a_2)^2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2\} \\ (\nabla a_3)^2 &= \frac{1}{4\Delta^2} \{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2\} \end{aligned} \right\} \quad (4.7.8)$$

これらを面積分するわけであるが、見ての通り全て x にも y にも依存しない。 x_i 、 y_i は全て定数値である。よって、面積分は一次三角形要素の面積を乗じるだけになる。 h_i 、 w_i 、及び最終的に行き着いている $\cot \theta$ を用いた表現の導出法については4.11で詳述する。

$$\begin{aligned}
\int_S \nabla a_1 \cdot \nabla a_2 \, ds &= \frac{1}{4\Delta^2} \Delta \{ (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \} \\
&= \frac{1}{4\Delta} (h_1 h_2 + w_1 w_2) \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (h_1 h_2 + w_1 w_2) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \cot \theta_3 \\
\int_S \nabla a_2 \cdot \nabla a_3 \, ds &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (h_2 h_3 + w_2 w_3) \right\} = -\frac{1}{2} \cot \theta_1 \\
\int_S \nabla a_3 \cdot \nabla a_1 \, ds &= -\frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\Delta} (h_1 h_3 + w_1 w_3) \right\} = -\frac{1}{2} \cot \theta_2 \\
\int_S (\nabla a_1)^2 \, ds &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\Delta} (h_1^2 + w_1^2) \right\} = \frac{1}{2} (\cot \theta_3 + \cot \theta_2) \\
\int_S (\nabla a_2)^2 \, ds &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\Delta} (h_2^2 + w_2^2) \right\} = \frac{1}{2} (\cot \theta_3 + \cot \theta_1) \\
\int_S (\nabla a_3)^2 \, ds &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\Delta} (h_3^2 + w_3^2) \right\} = \frac{1}{2} (\cot \theta_3 + \cot \theta_1)
\end{aligned}$$

これらを式(4.7.5)に代入すると次のようになる。ただし、二項目の Source Density 起因の項については4.12で詳述する。

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} \cot \theta_3 + \cot \theta_2 & -\cot \theta_3 & -\cot \theta_2 \\ -\cot \theta_3 & \cot \theta_3 + \cot \theta_1 & -\cot \theta_1 \\ -\cot \theta_2 & -\cot \theta_1 & \cot \theta_2 + \cot \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \frac{\Delta}{3} \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.9)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (4.7.10)$$

このように、汎関数を一次三角要素を用いて離散化することができた。その結果は式(4.7.10)のように行列の形で表すことができた。

4.8 汎関数の第一変分

変分法は汎関数の第一変分をとることで汎関数の極値を求める。そして、前述した電気工学の汎関数はその極値が空間のエネルギーが最小の状態であることが保証されている。ここでは汎関数の第一変分をとることを考える。

電気工学の汎関数は一般的に次のようなものであった。

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_S \{ \lambda (\nabla \phi)^2 - 2\phi \sigma \} ds$$

これについて、変分学の項目でやった $F[y(x)]$ の形への対応付けを考えなければならない。ここでは ϕ が $y(x)$ にあたる。

ϕ は座標パラメータ x, y などによって変わるポテンシャル分布を表す。そして、それ以外の演算すなわち、 F はポテンシャルの値を引数にして空間のエネルギーを算出している。つまり、ポテンシャル ϕ の分布の仕方によって空間のエネルギーは変化する。そして、変分法は汎関数が最小になるような引数関数の形状を求めることである。

よって、汎関数は簡単に書くと次のような形になる。

$$F[\phi(x, y)]$$

ここで、 ϕ' が存在しないことに注目して欲しい。変分学の項目では例として出した弧の長さに関する問題で、弧の長さ F は弧の形状 $y(x)$ と、その微分 $y'(x)$ をパラメータとして要求したが、その後の第一変分の導出については $y'(x)$ をないものとして考えた。

Laplace の方程式を解くための汎関数にはパラメータ関数に ϕ' というものが無いことを見越してのことであった。よって、上記汎関数の第一変分は式 (4.3.15) で与えられるように、汎関数を ϕ で微分した形となる。

$$\frac{\partial F[\phi(x, y)]}{\partial \phi(x, y)} = 0 \quad (4.8.1)$$

前節までに汎関数の導出から、一次三角要素による離散化が行われ、汎関数は行列の形で表されている。よって、その第一変分をとるとということは行列の微分を考える必要がある。行列式の微分については小さい行列式で法則を検証して、実際に汎関数に当てはめることとする。

まず、汎関数の第一項の微分について考える。小さい行列で同様の形を作って微分してみると次のような法則があることがわかる。

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1 S_{11} + \phi_2 S_{21} & \phi_1 S_{12} + \phi_2 S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \\ &= \phi_1^2 S_{11} + \phi_1 \phi_2 S_{21} + \phi_1 \phi_2 S_{12} + \phi_2^2 S_{22} \end{aligned} \quad (4.8.2)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_2} \end{bmatrix} M &= \begin{bmatrix} 2\phi_1 S_{11} + \phi_2 S_{21} + \phi_2 S_{12} \\ \phi_1 S_{21} + \phi_1 S_{12} + 2\phi_2 S_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\phi^T S \phi) = (S + S^T) \phi \quad (4.8.4)$$

第二項の微分については次のようになる。

$$M = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \phi_1 U_1 + \phi_2 U_2 \quad (4.8.5)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \phi_2} \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (4.8.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\phi^T U) = U \quad (4.8.7)$$

よって、

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{1}{2} (S + S^T) \phi - U$$

ここで、式 (4.7.9) を見ると $S_{ij} = S_{ji}$ であるから、 $S = S^T$ 。よって、

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = S \phi - U \quad (4.8.8)$$

以上の結果から汎関数の微分は次のようになる。

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} \cot \theta_3 + \cot \theta_2 & -\cot \theta_3 & -\cot \theta_2 \\ -\cot \theta_3 & \cot \theta_3 + \cot \theta_1 & -\cot \theta_1 \\ -\cot \theta_2 & -\cot \theta_1 & \cot \theta_2 + \cot \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} - \frac{\Delta}{3} \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.8.9)$$

4.9 複数要素の結合

前節までで一つの要素についての汎関数の第一変分を求めたわけであるが、実際の計算ではこの要素が複数個存在するわけで、それらを連立した行列式の構築が必要になる．ここでは複数要素の結合について考える．

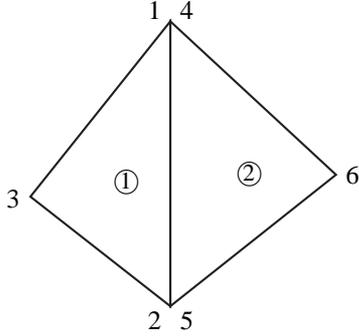


図 4.9.1: 二つの要素の接合

まず、複数個の要素があった場合、全体のエネルギーは複数個の要素がそれぞれ有するエネルギーの総和であるということになる．また、変分の原理は、そのエネルギーの総和についても成り立つ．つまり、次のようになる．

$$F^{(all)} = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)} + \dots \quad (4.9.1)$$

$$\frac{\partial F^{(all)}}{\partial \phi^{(all)}} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(all)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(all)}} + \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \phi^{(all)}} + \dots \quad (4.9.2)$$

$$= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} + \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \phi^{(3)}} + \dots \quad (4.9.3)$$

図 4.9.1 のように二つの要素があった場合、一つ目のエネルギーを $F^{(1)}$ 、二つ目のエネルギーを $F^{(2)}$ とすると、

$$\frac{\partial F^{(all)}}{\partial \phi^{(all)}} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \quad (4.9.4)$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.9.5)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} & S_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(2)} & S_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.9.6)$$

ここで、 $\phi_1 = \phi_4$ 、 $\phi_2 = \phi_5$ であることを考慮すると次のようになる．

$$\frac{\partial F^{(all)}}{\partial \phi} = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial \phi^{(1)}} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \phi^{(2)}} \quad (4.9.7)$$

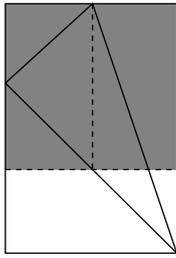
$$= \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & S_{13}^{(1)} & 0 \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & S_{23}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} & 0 & S_{13}^{(2)} \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} & 0 & S_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(2)} & 0 & S_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(2)} \\ U_2^{(2)} \\ 0 \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.9.8)$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} + S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(1)} + S_{12}^{(2)} & S_{13}^{(1)} & S_{13}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} + S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(1)} + S_{22}^{(2)} & S_{23}^{(1)} & S_{23}^{(2)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{33}^{(1)} & 0 \\ S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(2)} & 0 & S_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1^{(1)} + U_1^{(2)} \\ U_2^{(1)} + U_2^{(2)} \\ U_3^{(1)} \\ U_3^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.9.9)$$

$S_{ij}^{(n)}$ には空間のパラメータ λ が含まれており、各要素ごとに異なる値を用いることも可能であり、 $U_i^{(n)}$ には電荷密度などの Source Density が含まれている．全ての $U_i^{(n)}$ について $U_i^{(n)} = 0$ であれば、Laplace の方程式を解くことになり、そうでない場合は Poisson の方程式を解くことになる．

これらと同様にして用意した要素の全てを結合させ、一つの行列式にまとめ、その行列式を解くことで有限要素法で Poisson(Laplace) の方程式が解ける．

4.10 一次三角形要素の面積



ここでは $\det C = 2\Delta$ となることを示し、更に面積を表す別の表現を導く。二つ目の作業は次節以降に用いることになる。

左図のように、一次三角形要素の面積は網掛けした領域で示した部分の半分である。この一次三角形要素の面積を Δ とする。

図 4.10.1: 一次三角形要素の面積

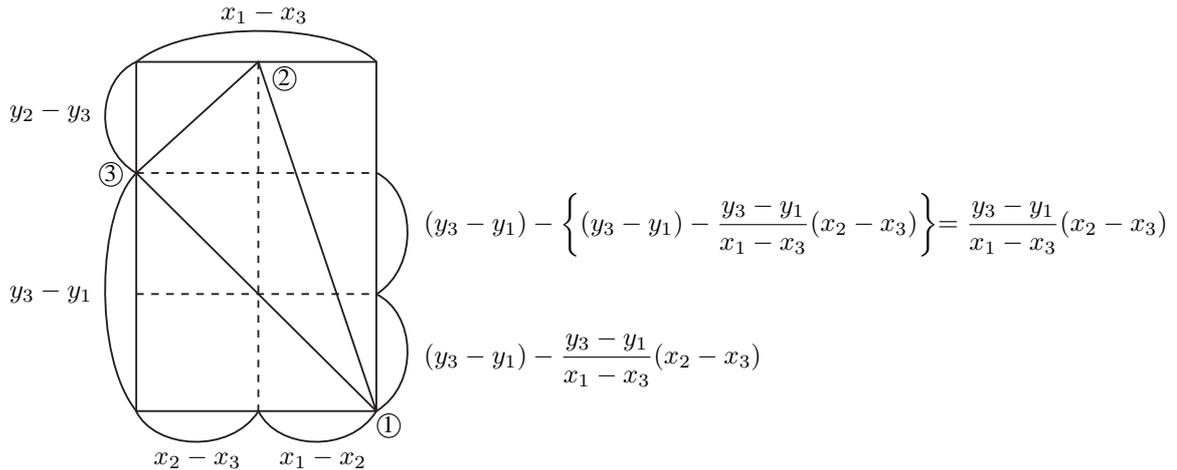


図 4.10.2: 一次三角形要素の各辺

図 4.10.1 の網掛けした領域の面積 2Δ は次のようにして求められ、それは行列の determinant で表現できることは次のように示される。

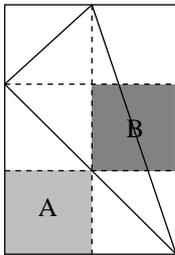


図 4.10.3: 等しい面積の領域

$$\begin{aligned}
 2\Delta &= \left\{ (y_2 - y_3) + \frac{y_3 - y_1}{x_1 - x_3} (x_2 - x_3) \right\} (x_1 - x_3) \\
 &= (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_1)(x_2 - x_3) \\
 &= x_1 y_2 - x_3 y_2 - x_1 y_3 + x_3 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_1 \\
 &= (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1) - (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2) \\
 &= \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \tag{4.10.1}
 \end{aligned}$$

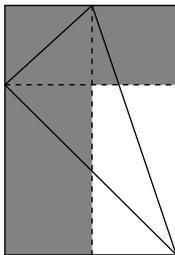


図 4.10.4: 別の面積の領域

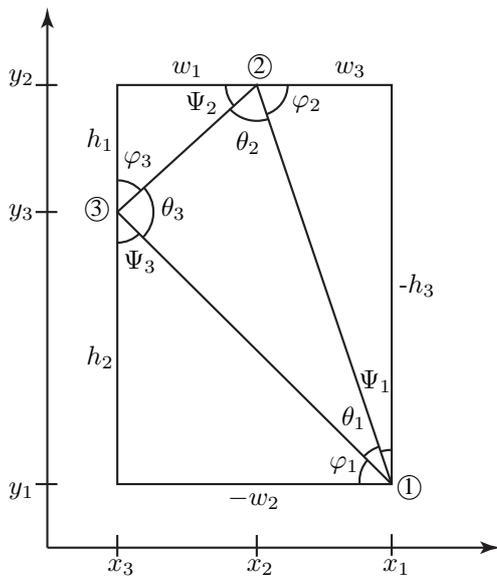
次に図 4.10.3 に示される A, B の二つの領域が等しいことを示す。これは次節の $\cot \theta_i$ に関する説明で使う。

$$\begin{aligned}
 A &= \left\{ (y_3 - y_1) - \frac{y_3 - y_1}{x_1 - x_3} (x_2 - x_3) \right\} (x_2 - x_3) \\
 &= \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \{ (y_3 - y_1)(x_1 - x_3) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_3) \} \\
 &= \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} (y_3 - y_1)(x_1 - x_2) \tag{4.10.2}
 \end{aligned}$$

$$B = \frac{y_3 - y_1}{x_1 - x_3} (x_2 - x_3)(x_1 - x_2) \tag{4.10.3}$$

よって、面積 A, B は等しいことが分かる。つまり一次三角形要素の面積の二倍である 2Δ は図 4.10.4 のような領域でも表せる。

4.11 一次三角形要素の角度表現



汎関数の第一項の S 行列の $\cot \theta_i$ の表現について導出法を示す。各辺の長さは必ず左回りに計算するものとする。これは、三角形の向きにより各辺の正負が変わる可能性があるため、何らかの形で変の正負の向きを要素の各辺について統一する必要があるためである。

以下に各辺の長さとして一次三角形要素の各頂点の座標との対応を示す。 h_3, w_2 については左図において負数となるので図中ではマイナス表記をして正の値として扱うことにする。

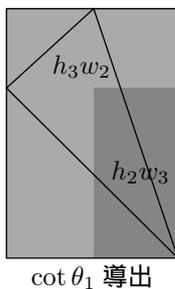
$$\begin{aligned} h_1 &= y_2 - y_3 & w_1 &= x_2 - x_3 \\ h_2 &= y_3 - y_1 & w_2 &= x_3 - x_1 \\ h_3 &= y_1 - y_2 & w_3 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

これらを用いて \cos について計算すると式 (4.7.9) の \cos を用いた表記が導き出される。

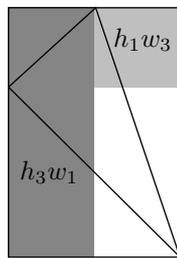
図 4.11.1: 一次三角形要素と角度

$$\begin{aligned} \cot \theta_1 &= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \Psi_1\right) \\ &= \frac{\tan \varphi_1 + \tan \Psi_1}{1 - \tan \varphi_1 \tan \Psi_1} \\ &= -\frac{1}{2\Delta}(h_2 h_3 + w_2 w_3) \end{aligned} \quad (4.11.1)$$

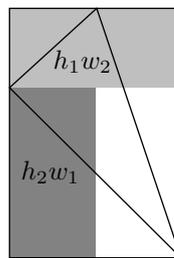
$$\begin{aligned} \cot \theta_2 &= \cot(\pi - \varphi_2 - \Psi_2) \\ &= -\frac{1 - \tan \varphi_2 \tan \Psi_2}{\tan \varphi_2 + \tan \Psi_2} \\ &= -\frac{1}{2\Delta}(h_1 h_3 + w_1 w_3) \end{aligned} \quad (4.11.2)$$



$\cot \theta_1$ 導出



$\cot \theta_2$ 導出



$\cot \theta_3$ 導出

$$\begin{aligned} \cot \theta_3 &= \cot(\pi - \varphi_3 - \Psi_3) \\ &= -\frac{1 - \tan \varphi_3 \tan \Psi_3}{\tan \varphi_3 + \tan \Psi_3} \\ &= -\frac{1 - \frac{h_1}{w_1} - \frac{h_2}{w_2}}{\frac{w_1}{h_1} + \frac{w_2}{h_2}} \\ &= -\frac{h_1 h_2 + w_1 w_2}{h_2 w_1 - h_1 w_2} \\ &= -\frac{1}{2\Delta}(h_1 h_2 + w_1 w_2) \end{aligned} \quad (4.11.3)$$

図 4.11.2: 面積区分

4.12 汎関数第二項の計算

ここでは汎関数の第二項 $-\int_S \phi \sigma \, ds$ の展開について示す。この項は $x - y$ 方向に対する重積分となる。汎関数の第二項は次のようになっていた。

$$\begin{aligned} -\int_S \phi \sigma \, ds &= -\sigma \sum_{i=1}^3 \phi_i \int_S a_i \, ds \\ &= -\sigma \sum_{i=1}^3 \phi_i \int_S \frac{1}{2\Delta}(b_i + c_i x + d_i y) \, ds \\ &= -\frac{\sigma}{2\Delta} \sum_{i=1}^3 \phi_i \int_S (b_i + c_i x + d_i y) \, ds \end{aligned} \quad (4.12.1)$$

この式 (4.12.1) の積分項だけに注目すると次のような三つの積分になる。

$$\int_S (b_i + c_i x + d_i y) \, ds = \int_S b_i \, ds + \int_S c_i x \, ds + \int_S d_i y \, ds \quad (4.12.2)$$

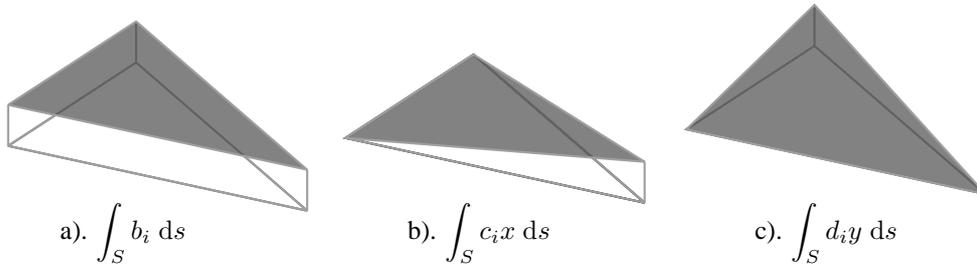


図 4.12.1: 各項の面積分

各項の面積分は図 4.12.1のように、左から順に x, y 軸方向にポテンシャル一定、 y 軸方向にポテンシャル一定で x 軸方向に一次関数で変化あり、 x 軸方向にポテンシャル一定で y 軸方向に一次関数で変化ありの領域について積分することになる。この積分というのは、図 4.12.1に示される体積を求めることになる。

まず、一般的な要素の座標を計算のしやすさのために座標軸を回転、移動させる。

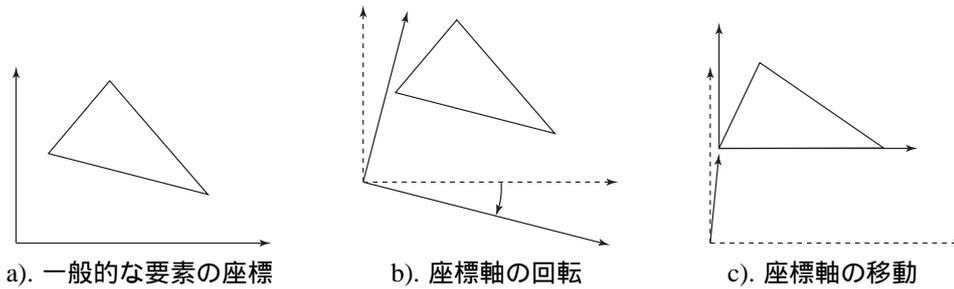


図 4.12.2: 座標軸の操作

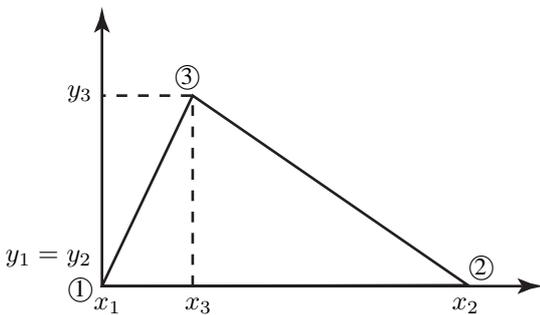


図 4.12.3: 最終的な座標系

最終的に図 4.12.3のようになる。座標軸を回転、移動させてしまったために最終的な結果に対して座標系を元に戻してやる必要があるが、これから導き出される結果は座標軸に依存しない形になるので、図 4.12.3を持って一般的な議論ができる。

さて、まずは定数項の面積分について考えると、当然ながら [ポテンシャル] × [三角形の面積] という形になることは予想できるのであるが、それを積分の形で表現しなければならない。実際は、積分の数式は与えられており、それを x, y 軸についての積分の範囲をどう指定するかが問題となる。

まず、 $b_i = 1$ として定数項の面積分を解こうとする時、次のような間違いをするかもしれない。

$$\begin{aligned} \int_S ds &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_3} dy dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (y_3 - y_1) dx \\ &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \\ &= x_2 y_3 \end{aligned}$$

結果は明らかに三角形の面積にはなっていないので間違いであることが分かる。

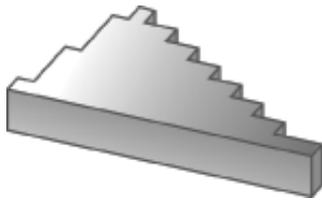


図 4.12.4: 定数項の面積分

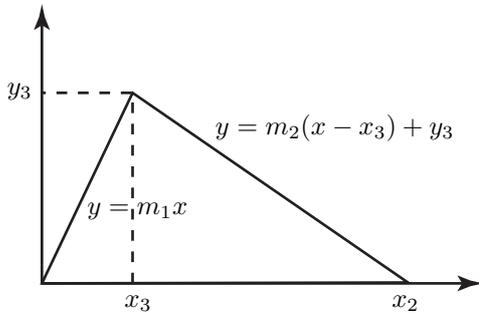


図 4.12.5: 定数項の面積分

これをどうしたらよいのかは積分を離散化してしまえば分かりやすい。左図を見ると、 x 軸の位置によって y の値が変わっている。つまり、 y の値は x の関数であるわけである。

$$b_i \int_S ds = b_i f(X_1) + b_i f(X_2) + b_i f(X_3) + \dots$$

もちろん視点をえて x 軸を y 軸の関数として表してもよい。いずれにせよ、どちらかの軸をもう一方の軸で表現する必要があるわけである。

y 軸を x 軸の関数として扱うわけであるが、表現は二つの領域の異なる傾きを持つ一次関数で表すことができることは明白である。それぞれの傾きを m_1, m_2 とすると、それらは次のように求めることができる。

$$y = \frac{y_3}{x_3} x = m_1 x \tag{4.12.3}$$

$$y = -\frac{y_3}{x_2 - y_3} (x - x_3) + y_3 = m_2 (x - x_3) + y_3 \tag{4.12.4}$$

これらを用いれば、定数項の面積分は次のように計算できる。ただし、ここでは簡単のため $b_i = 1$ として計算する。

$$\begin{aligned} b_i \int_S ds &= \int_0^{x_2} \int_0^{f(x)} ds \\ &= \int_0^{x_3} \int_0^{m_1 x} dy dx + \int_{x_3}^{x_2} \int_0^{m_2(x-x_3)+y_3} dy dx \\ &= \int_0^{x_3} m_1 x dx + \int_{x_3}^{x_2} \{m_2(x-x_3) + y_3\} dx \\ &= \frac{1}{2} m_1 x_3^2 + \frac{1}{2} m_2 (x_2^2 - x_3^2) - (m_2 x_3 - y_3)(x_2 - x_3) \\ &= \frac{1}{2} \frac{y_3}{x_3} x_3^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{y_3}{x_2 - y_3}\right) (x_2^2 - x_3^2) - \left(-\frac{y_3}{x_2 - y_3} x_3 - y_3\right) (x_2 - x_3) \\ &= \frac{1}{2} y_3 x_2 \\ &= \Delta \end{aligned} \tag{4.12.5}$$

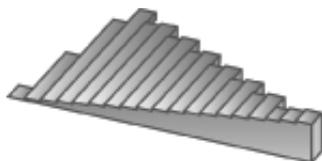


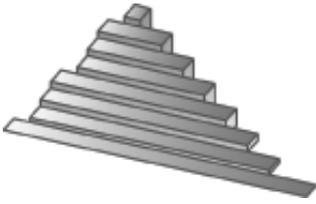
図 4.12.6: x の項の面積分

次に x の項について考えると、求めるべき面積分は左図のような体積である。 x の項は y 方向の傾きはゼロであるので x 方向に向かって上がる階段状になる。つまり、離散化して積分を考えると次のように [ポテンシャル $c_i X_j$] \times [y 方向の長さ] の総和となることから、先と同様に y 軸方向を x 軸で表現すればよいことになる。

$$c_i \int_S x ds = c_i X_1 f(X_1) + c_i X_2 f(X_2) + c_i X_3 f(X_3) + \dots$$

よって、 x の項の面積分は次のようになる。ただし、簡単のため $c_i = 1$ とする。

$$\begin{aligned} c_i \int_S ds &= \int_0^{x_3} \int_0^{m_1 x} x dy dx + \int_{x_3}^{x_2} \int_0^{m_2(x-x_3)+y_3} x dy dx \\ &= \int_0^{x_3} m_1 x^2 dx + \int_{x_3}^{x_2} m_2 x^2 + x(y_3 - m_2 x_3) dx \\ &= \frac{1}{2} x_2 y_3 \frac{1}{3} (x_2 + x_3) \\ &= \frac{\Delta}{3} (x_2 + x_3) \end{aligned} \tag{4.12.6}$$

図 4.12.7: y の項の面積分

次に y の項について考えると、求めるべき面積分は左図のような体積である。 y の項は x 方向の傾きはゼロであるので y 方向に向かって上がる階段状になる。つまり、離散化して積分を考えると次のように [ポテンシャル $d_i Y_j$] \times [x 方向の長さ] の総和となることから、今度は x 軸方向を y 軸で表現すればよいことになる。

$$d_i \int_S y \, ds = d_i Y_1 f(Y_1) + d_i Y_2 f(Y_2) + d_i Y_3 f(Y_3) + \dots$$

y についての積分をするので、座標系を図 4.12.8 のようにして考える。傾き m_1, m_2 は次のように求められる。

$$x = -\frac{x_2 - x_3}{y_3} y + x_2 = m_2 y + x_2 \quad (4.12.7)$$

$$x = \frac{x_3}{y_3} y = m_1 y \quad (4.12.8)$$

よって、 x の項の面積分は次のようになる。ただし、簡単のため $d_i = 1$ とする。

$$\begin{aligned} d_i \int_S y \, ds &= \int_0^{y_3} \int_{m_1 y}^{m_2 y + x_2} y \, dx \, dy \\ &= \int_0^{y_3} y(m_2 y + x_2 - m_1 y) \, dy \\ &= \frac{1}{2} x_2 y_3 - \frac{1}{3} y_3^2 \\ &= \frac{\Delta}{3} y_3 \end{aligned} \quad (4.12.9)$$

図 4.12.8: y 軸主体の座標系

以上のように各項の積分が算出されたので、それらを足し合わせてみることにする。

$$b_i \int_S ds + c_i \int_S x \, ds + d_i \int_S y \, ds = b_i \Delta + c_i \frac{\Delta}{3} (x_2 + x_3) + d_i \frac{\Delta}{3} y_3 \quad (4.12.10)$$

b_i, c_i, d_i は $i = 1 \sim 3$ までであるわけであるが、結果的にはどれを入れても同じになる。ここでは $i = 1$ の場合で考えることにする。 b_i, c_i, d_i の詳細については式 (4.6.7), 式 (4.6.8) で定義されている。

$$b_i = x_2 y_3 - x_3 y_2 = x_2 y_3$$

$$c_i = y_2 - y_3 = -y_3$$

$$d_i = x_3 - x_2$$

これを式 (4.12.10) に代入して、

$$\frac{\Delta}{3} \{3b_1 + c_1(x_2 + x_3) + d_1 y_3\} = \frac{\Delta}{3} 2\Delta \quad (4.12.11)$$

よって、汎関数の第二項は次のように展開される。

$$\begin{aligned} - \int_S \phi \sigma \, ds &= -\frac{\sigma}{2\Delta} \sum_{i=1}^3 \phi_i \int_S (b_i + c_i x + d_i y) \, ds \\ &= -\sigma \frac{1}{2\Delta} \frac{\Delta}{3} 2\Delta \sum_{i=1}^3 \phi_i \\ &= - \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \frac{\Delta}{3} \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12.12)$$

第5章 関数型トモグラフィ理論の検証

5.1 シミュレーションによる検証

5.1.1 シミュレーションの概要

第2章で述べた関数型トモグラフィ理論である，Sensitivity 行列法，電気双極子法について有限要素法を用いたシミュレーションによって，その有効性の検証を行う．

有限要素法における空間エネルギーを表す汎関数は，式 (4.4.9) で表される電界系汎関数を用いる．ここで，誘電率が影響を与えるリアクタンス成分は十分小さいものとし， $\mathcal{L}_E = 0$ する．

$$F(\phi) = \int_s (\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_\rho) ds \quad (5.1.1)$$

$$= \int_S \{\kappa(\nabla\phi)^2 - \phi\rho\} ds \quad (5.1.2)$$

Sensitivity 行列法では，断層撮影対象領域へ電圧を印加し，その際に断層撮影対象領域が示すインピーダンスを用いて断層撮影を行う．この場合，断層撮影対象への働きかけは，電圧を基準に考えても，電流を基準に考えても等価である．したがって，空間のシステム方程式は Poisson の方程式，Laplace の方程式のどちらを用いても良い．計算上，エネルギー供給を電圧として表現した Laplace の方程式のほうが，扱いやすいので本論文では Sensitivity 行列法の空間システム方程式として Laplace の方程式を用いる．

電気双極子法では，断層撮影対象の外周部電圧分布の変化量を用いて断層撮影を行う．この時，基準状態と測定対象状態の場合で，断層撮影対象領域へ注入される電流量が等しいことが重要な条件となる．電気回路における複数の抵抗素子での電圧降下量の比較を行う場合，電流量が一定でなければその比較はできない．よって，電気双極子法においても，電流量一定の条件を満たす必要がある．つまり，電気双極子法では，空間に対するエネルギー供給は電荷の形で表現される必要がある．よって，空間システム方程式は Poisson の方程式を用いる．

以上のように，本節では有限要素法を用いて，Sensitivity 行列法，電気双極子法の有効性について検証を行う．

5.1.2 Sensitivity 行列法のシミュレーション

2.2で述べた理論的背景を前提として Sensitivity 行列法の数値シミュレーションを行う．シミュレーション手法としては有限要素法を用いる．

Sensitivity 行列法は，断層撮影対象のインピーダンスを用いて断層撮影を行う．断層撮影対象のインピーダンス $R[\Omega]$ は，断層撮影対象の電圧印加電極間の電圧 $V[V]$ と断層撮影対象へ注入される電流 $I[A]$ によって式 (5.1.3) のように得られる．

$$R = \frac{V}{I} \quad (5.1.3)$$

式 (5.1.3) において， $R[\Omega]$ は未知であるが，一定の値を持っている．よって， $V[V]$ と $I[A]$ には互いに従属関係が成り立つ．つまり， $V[V]$ を定めると，自動的に $I[A]$ が決定され， $I[A]$ を定めると，自動的に $V[V]$ が決定される．したがって，Sensitivity 行列法で用いるインピーダンスを取得するためには，領域へ印加する電圧 $V[V]$ と電流 $I[A]$ の具体的な値は考慮する必要がない．

以上のことから，Sensitivity 行列法における空間のシステム方程式は，Poisson の方程式，Laplace の方程式，いずれで表現しても良い．ここでは，空間のシステム方程式として式 (5.1.4) で表される，Laplace の方程式を用いる．ここで， $\kappa[S]$ は導電率， $\phi[V]$ は電圧をあらわす．

$$\nabla \cdot \kappa(\nabla\phi) = 0 \quad (5.1.4)$$

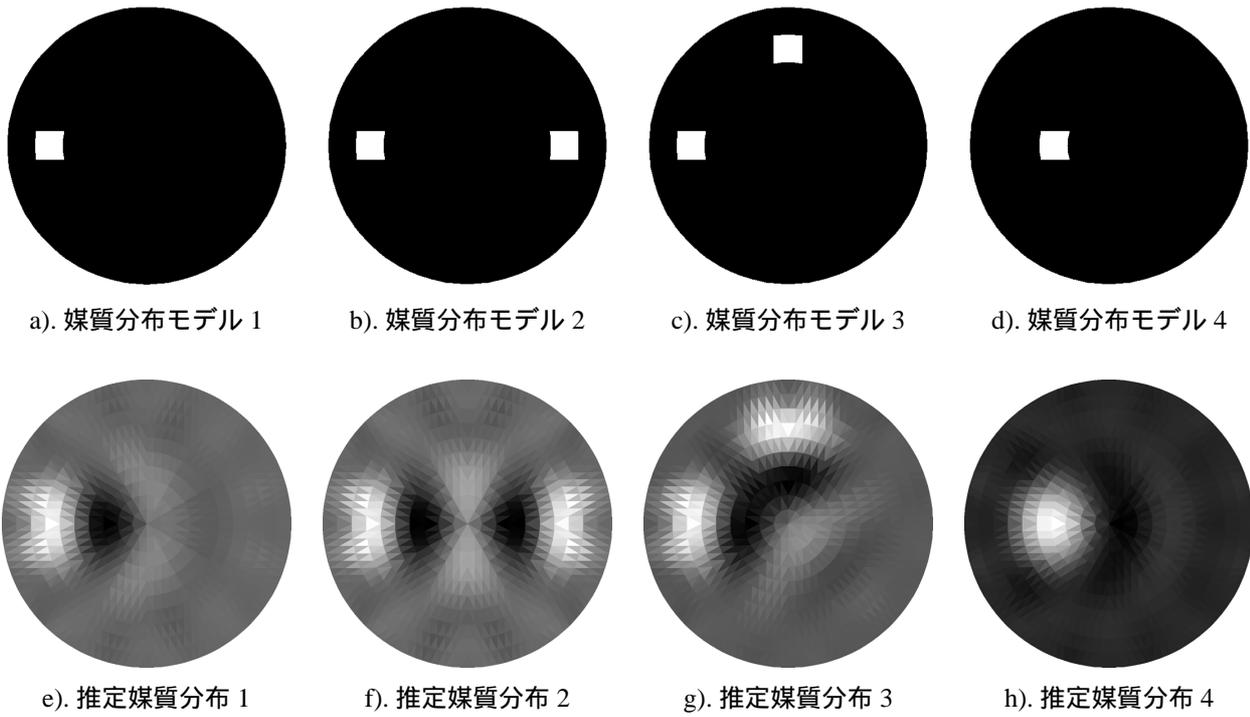


図 5.1.1: 正解の媒質分布と, Sensitivity 行列法による推定媒質分布

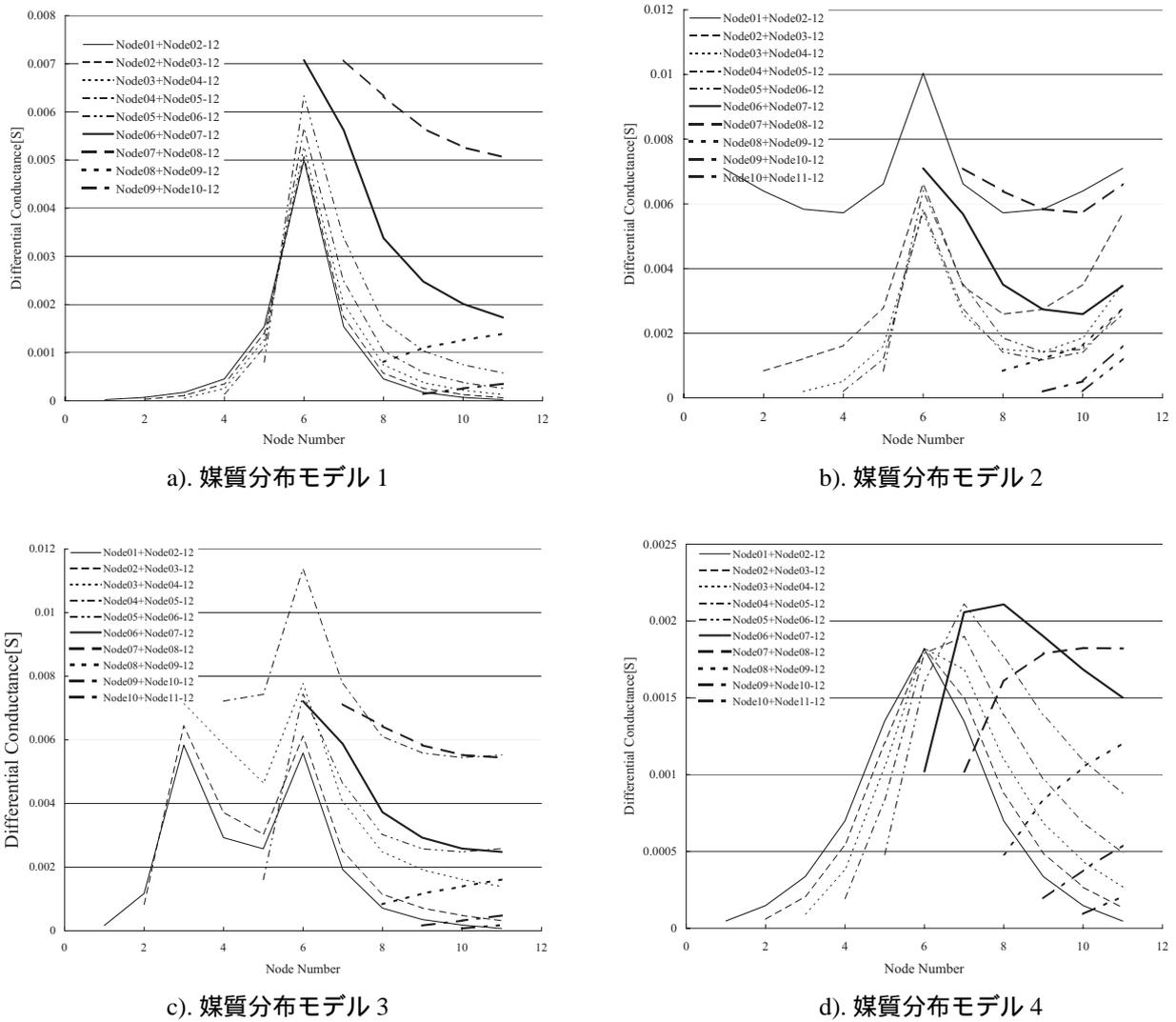


図 5.1.2: インピーダンス変化量

Sensitivity 行列法における式 (5.1.4) で表されるエネルギー供給状態は、汎関数で表すと式 (5.1.6) のようになる。

$$F(\phi) = \int_S \mathcal{L}_R ds \quad (5.1.5)$$

$$= \int_S \kappa(\nabla\phi)^2 ds \quad (5.1.6)$$

断層撮影対象領域外周部に設置する測定電極数は 12 極とし、電極番号は図.5.1.3の様を設定する。断層撮影対象内は 1200 要素に離散化する。

図.5.1.1 a), b), c), d) は、シミュレーションに用いた媒質分布を表し、図.5.1.1 e), f), g), h) は式 (2.2.5) から得られたシミュレーション結果を表す。図.5.1.1における黒色部は基準導電率部、白色部は検出対象導電率部をあらわしている。図.5.1.1 e), f), g), h) の結果は、それぞれ、算出結果の白色部が検出対象導電率部付近に現れていることから、検出対象を算出することに成功していると考えられるが、白色部に隣接して黒色部が存在する事が解の信頼性を低くしている。

図.5.1.2 a) は図.5.1.1 a) における各測定電極組み合わせとインピーダンス変化量の関係をあらわす。図.5.1.2のデータ列 Node01+Node02-12 はインピーダンスを計測するために接続する二極の電極のうち、一極目を Node01 へ接続し、二極目を Node02 から Node12 へとつなぎ変えたときに得られるインピーダンスを表す。測定電極と対象導電率部が近接しているときにインピーダンス変化量が高いことが分かる。これらのデータ列を式 (2.2.5) の Z' として、 κ を求めた結果が図.5.1.1 e) である。逆問題の解法としては GVSPM 法を用いた。図.5.1.2 b)-d) も同様である。

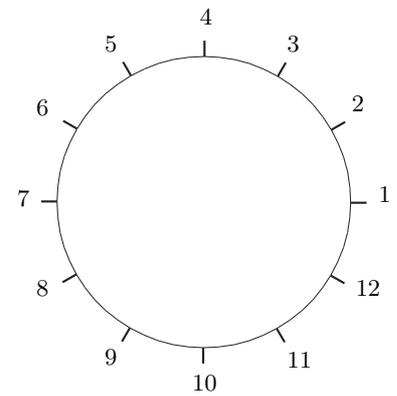


図 5.1.3: 断層撮影対象領域への電極配置

5.1.3 電気双極子法のシミュレーション

2.3で述べた理論的背景を前提として有限要素法による電気双極子法の数値シミュレーションを行う。シミュレーション手法としては有限要素法を用いる。

電気双極子法は、断層撮影対象外周部の電圧変化量を用いて断層撮影を行う。断層撮影領域内が均一の媒質で構成されている基準状態における断層撮影対象外周部電圧を基準電圧とする。そして、任意の媒質分布状態における断層撮影対象外周部電圧と基準電圧の差分から、断層撮影対象外周部の電圧変化量を得る。

つまり、式 (5.1.3) における、 $V[V]$ が取得対象情報となる。式 (5.1.3) において $R[\Omega]$ は未知であるが、一定の値を持っている固定値である。したがって、 $V[V]$ を取得対象情報とするためには、 $I[A]$ に対して、 $V[V]$ を従属させる必要がある。よって、基準状態への電流注入量と、断層撮影対象の媒質分布状態への電流注入量を等しくする必要がある。

以上のことから、電気双極子法における空間のシステム方程式は式 (5.1.7) のように Poisson の方程式で表すと計算が行いやすい。ここで、 $\kappa[S]$ は導電率、 $\phi[V]$ は電圧、 $j[A/m^2]$ は印加電流密度をあらわす。

$$\nabla \cdot \kappa(\nabla\phi) = j \quad (5.1.7)$$

電気双極子法における式 (5.1.7) で表されるエネルギー供給状態は、汎関数で表すと式 (5.1.9) のようになる。

$$F(\phi) = \int_s (\mathcal{L}_R - \mathcal{L}_\rho) ds \quad (5.1.8)$$

$$= \int_S \{ \kappa(\nabla\phi)^2 - \phi\rho \} ds \quad (5.1.9)$$

断層撮影対象領域外周部に設置する測定電極数は24極とし、電極番号は図.5.1.4の様に設定する。断層撮影対象内は1200要素に離散化する。また、電流通電パターンは図.5.1.5に示される6パターンとする。式(2.3.4)で表される電気双極子法のシステム方程式で用いる電気双極子は、断層撮影対象領域を離散化した微小領域の重心に存在するものとする。

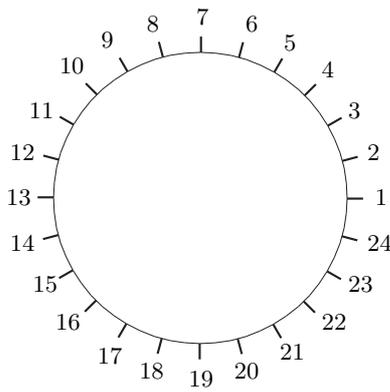


図 5.1.4: 断層撮影対象領域への電極配置

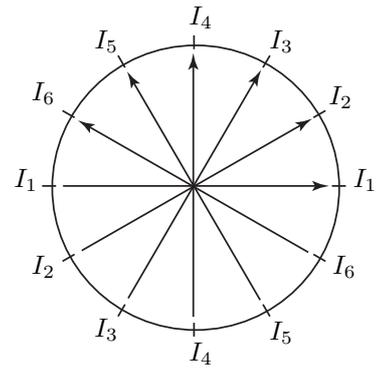


図 5.1.5: 断層撮影対象領域への電流注入パターン

図.5.1.6 a)-d) はシミュレーションに用いた導電率分布をあらわし、図.5.1.6 e)-h) は、式(2.3.4)、(2.3.7) から得られた媒質分布をあらわす。図.5.1.6 e)-h) の結果は図.5.1.6 a)-d) に示される検出対象媒質の位置よりも内側に検出対象導媒質部が検出されるという傾向はあるものの、比較的良好な結果が得られていると考えられる。

図.5.1.7は図.5.1.6 a)における、検出対象媒質部の有無による電圧変化をあらわした電圧分布と等電圧線である。図.5.1.7は式(2.3.1)によって得られる。図.5.1.7に示される角度は電流注入角度を表し、図.5.1.5における I_1 の角度を基準角度 0° とする。図.5.1.8, 図.5.1.9, 図.5.1.10についても同様である。

図.5.1.11 a) は図.5.1.7の電圧分布から、対象領域外周部に設置された24極の測定電極の値のみを抽出したものである。図.5.1.11 a) に示される外周部電圧データ列を Gauss の法則にしたがって正規化したものを式(2.3.4)の V とする。Gauss の法則とは、任意の開領域の外周部から出て行く電束の総和はその領域内に存在する電荷の総和に等しいことを意味する。本研究においては領域内に存在する電荷は全て電気双極子であることを前提とする。電気双極子は陽・陰電荷の極対なので、断層撮影対象領域外周部から出て行く電束の総和は0である。図.5.1.11 b)-d) は、それぞれ図.5.1.8, 図.5.1.9, 図.5.1.10の測定電極の値を表す。

図.5.1.12は図.5.1.5に示される各電流注入パターンにおいて得られる式(2.3.4)をそれぞれ独立に解いて得られた電気双極子分布をあらわす。逆問題の解法としてはGVSPM法を用いた。図.5.1.12 b), c), d), f), g), h) に示される電気双極子分布から、電流の通電パターンを変えても共通に電気双極子が検出される位置を抽出した結果が図.5.1.6 e) である。図.5.1.12に示される電気双極子が有する電荷の絶対値を0から1の間に正規化して、式(2.3.7)の畳み込み演算を行うことで共通位置の抽出を行った。図.5.1.13, 図.5.1.14, 図.5.1.15についても同様である。

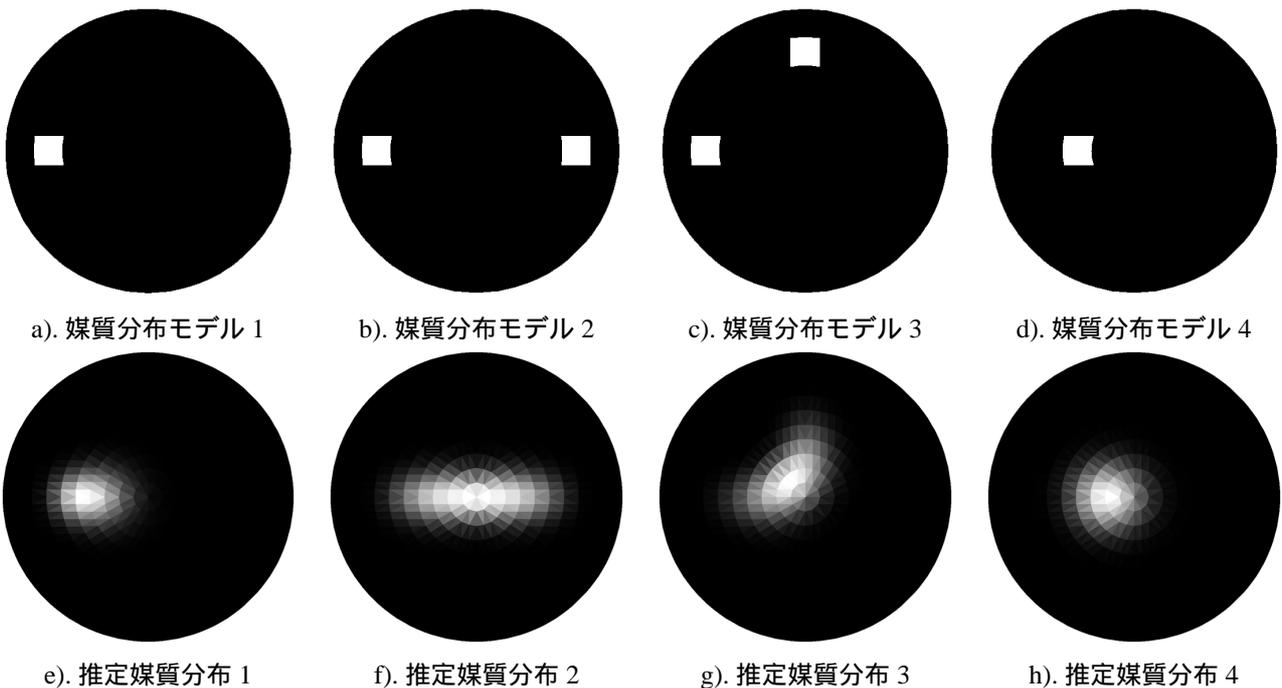


図 5.1.6: 正解の媒質分布と、電気双極子法による推定媒質分布

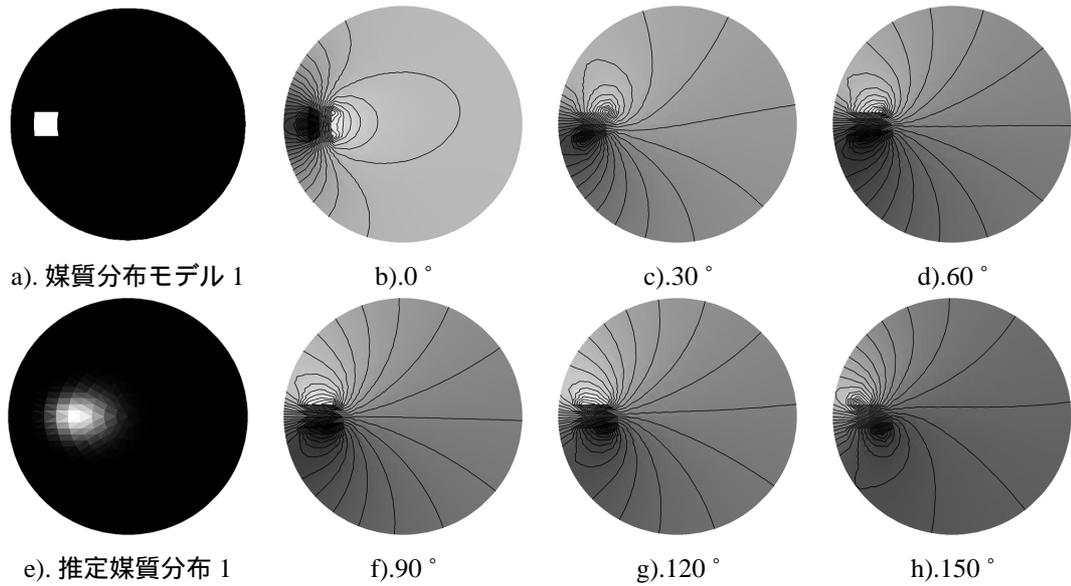


図 5.1.7: 式 (2.3.1) によって得られる差分電圧分布

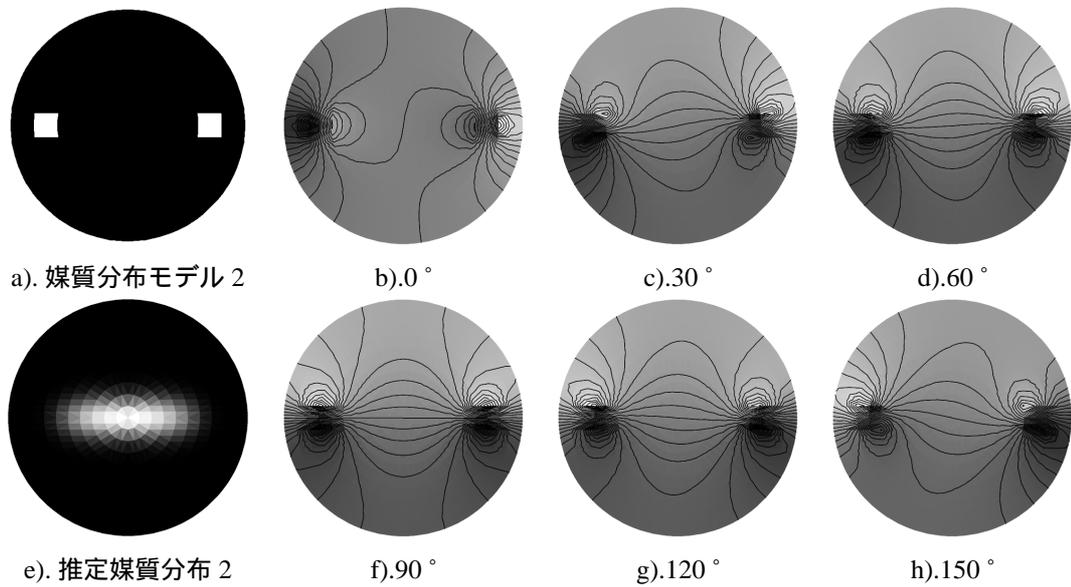


図 5.1.8: 式 (2.3.1) によって得られる差分電圧分布

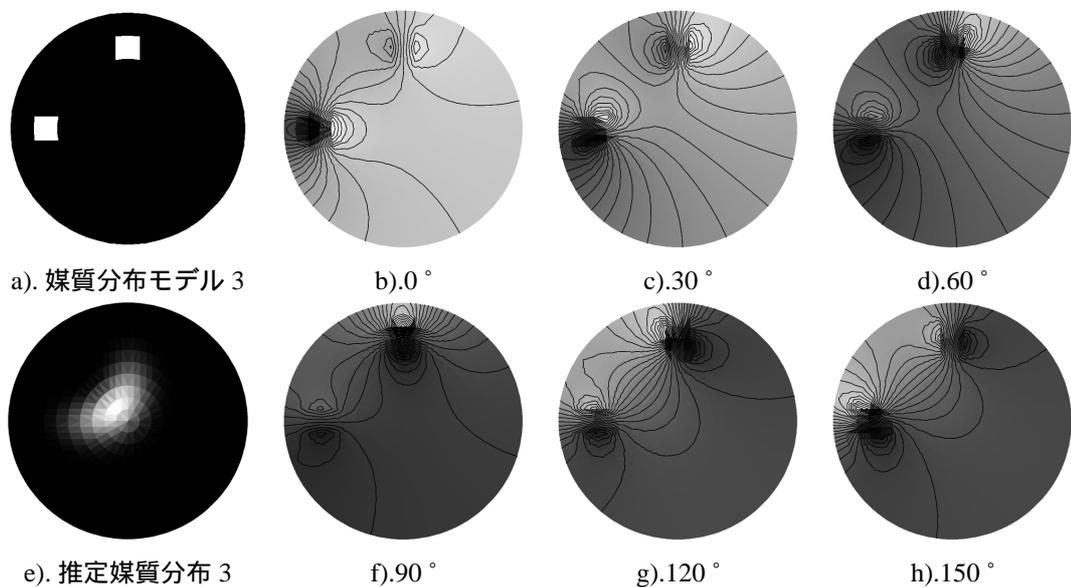


図 5.1.9: 式 (2.3.1) によって得られる差分電圧分布

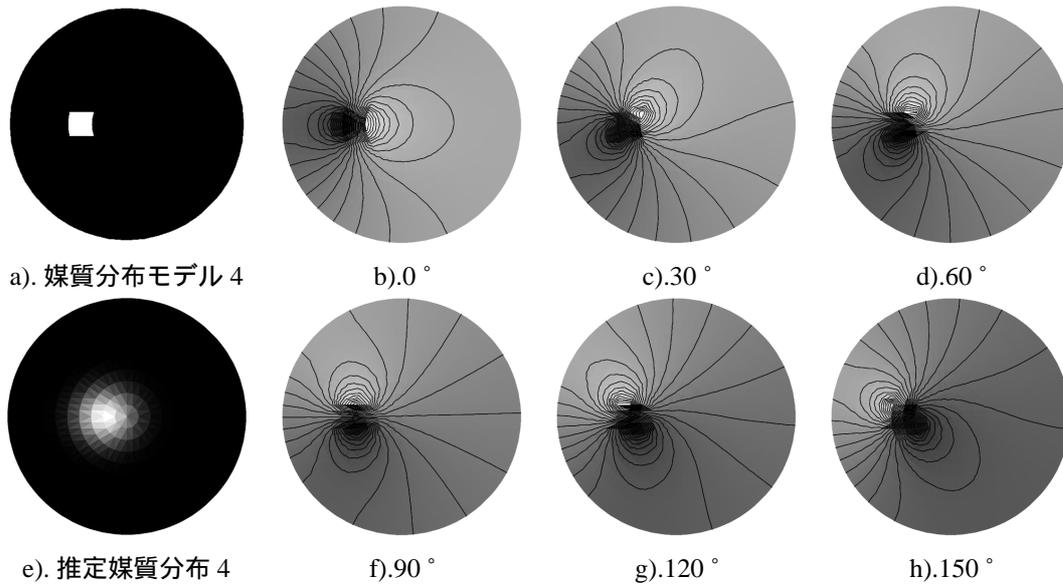


図 5.1.10: 式 (2.3.1) によって得られる差分電圧分布

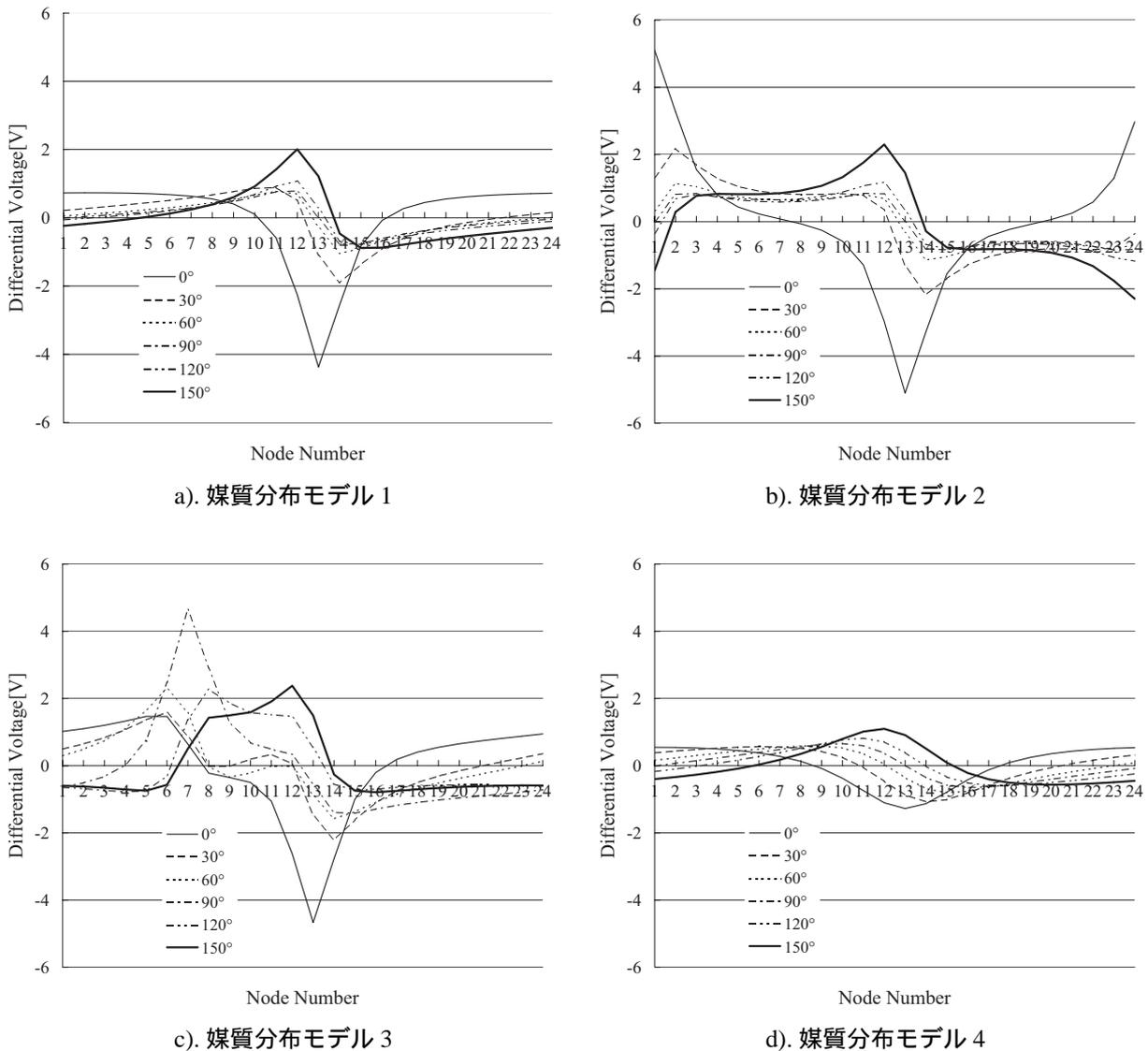


図 5.1.11: 領域外周部電圧分布

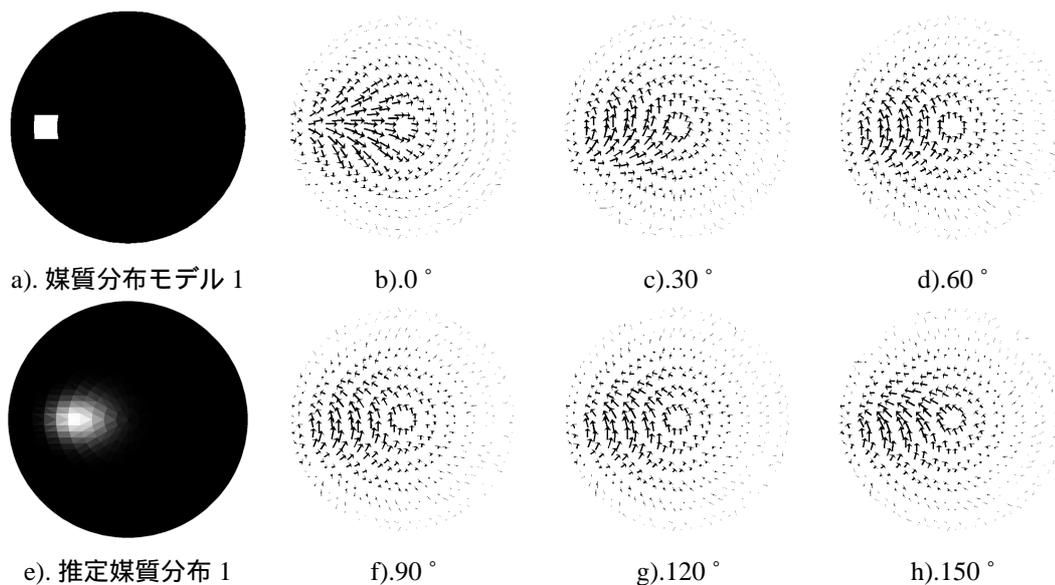


図 5.1.12: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布

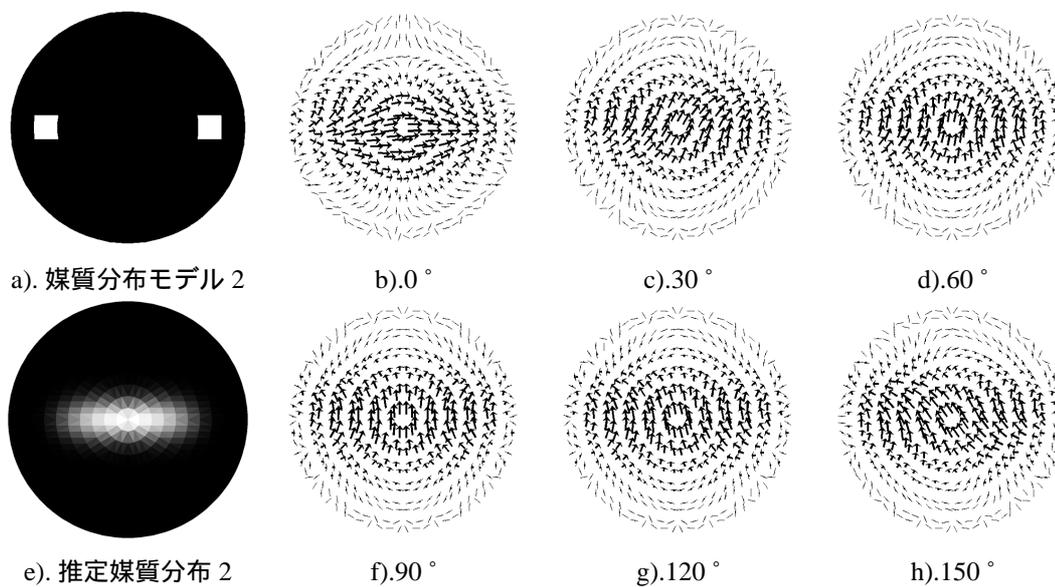


図 5.1.13: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布

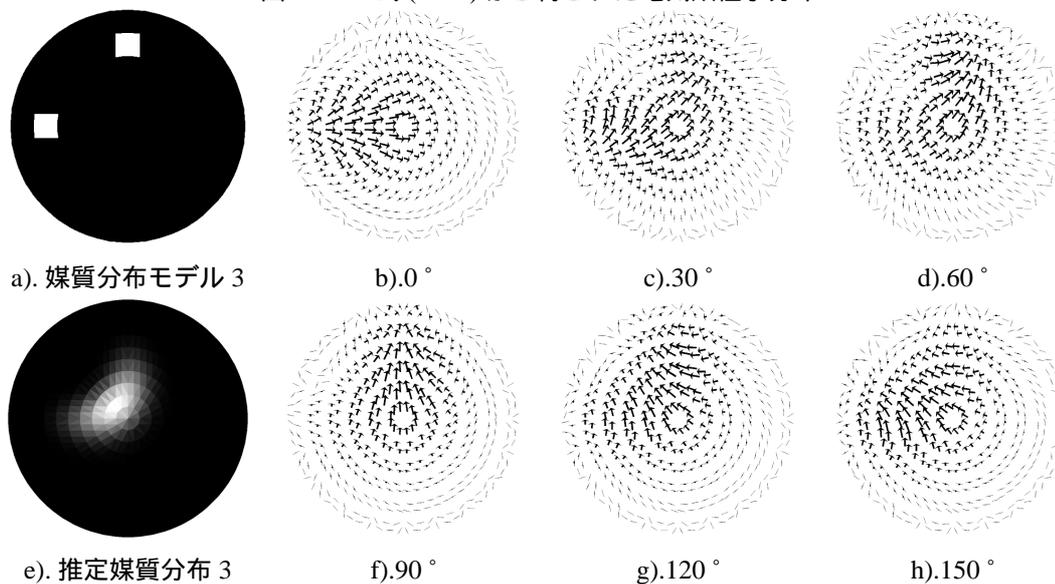


図 5.1.14: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布

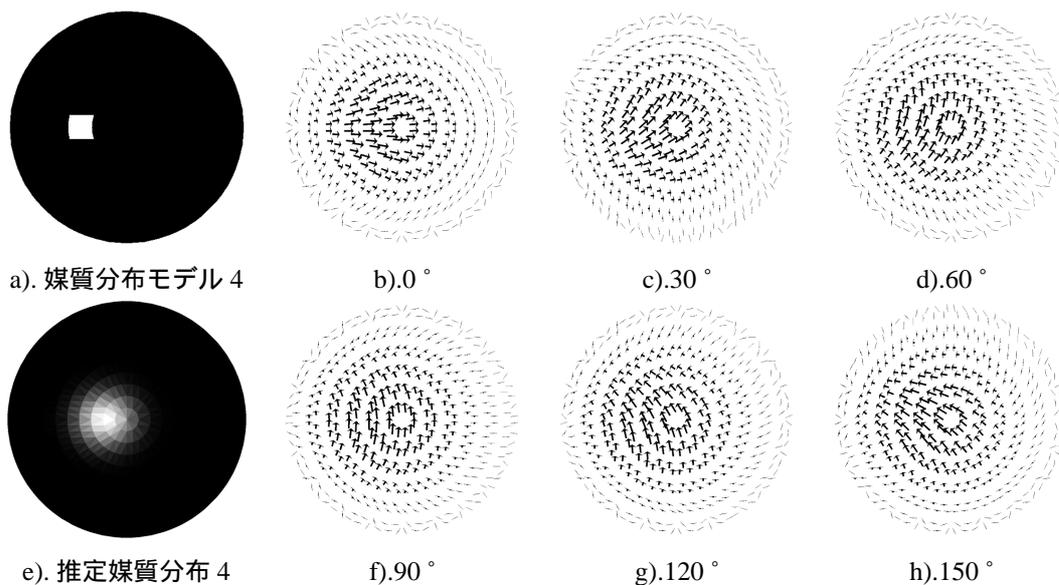


図 5.1.15: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布

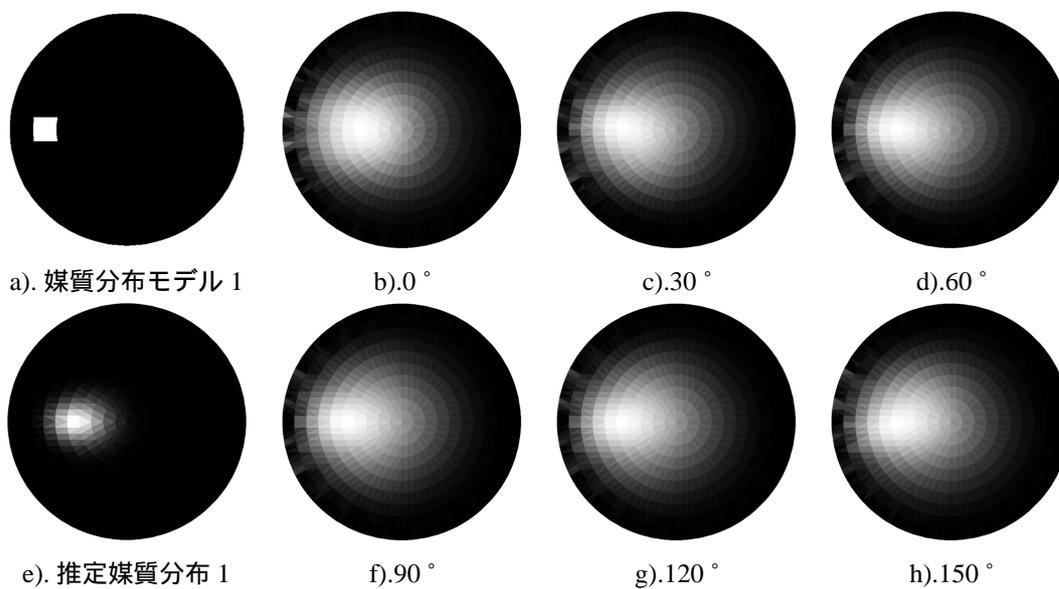


図 5.1.16: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

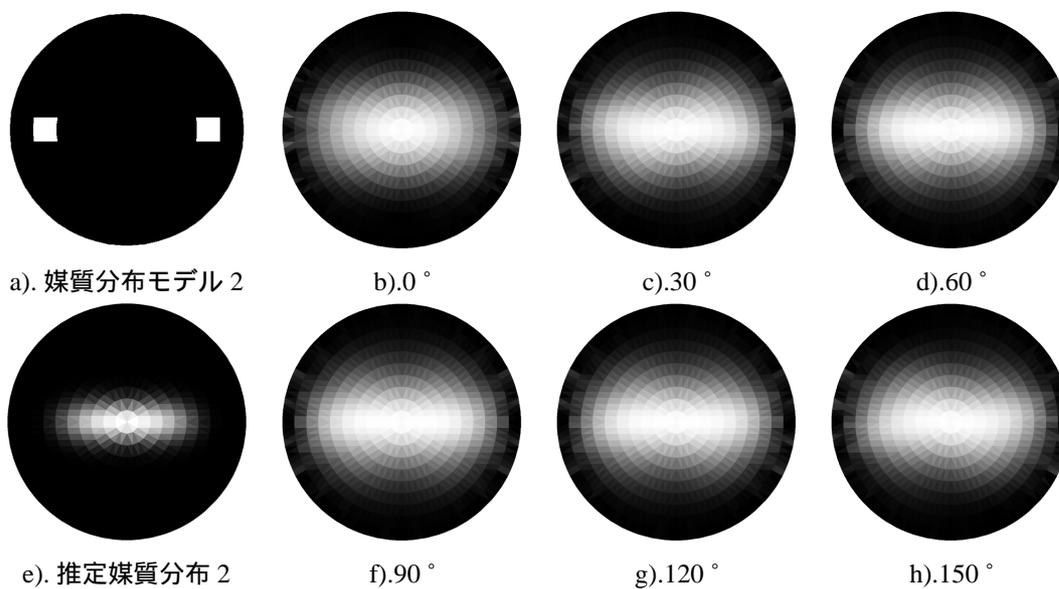


図 5.1.17: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

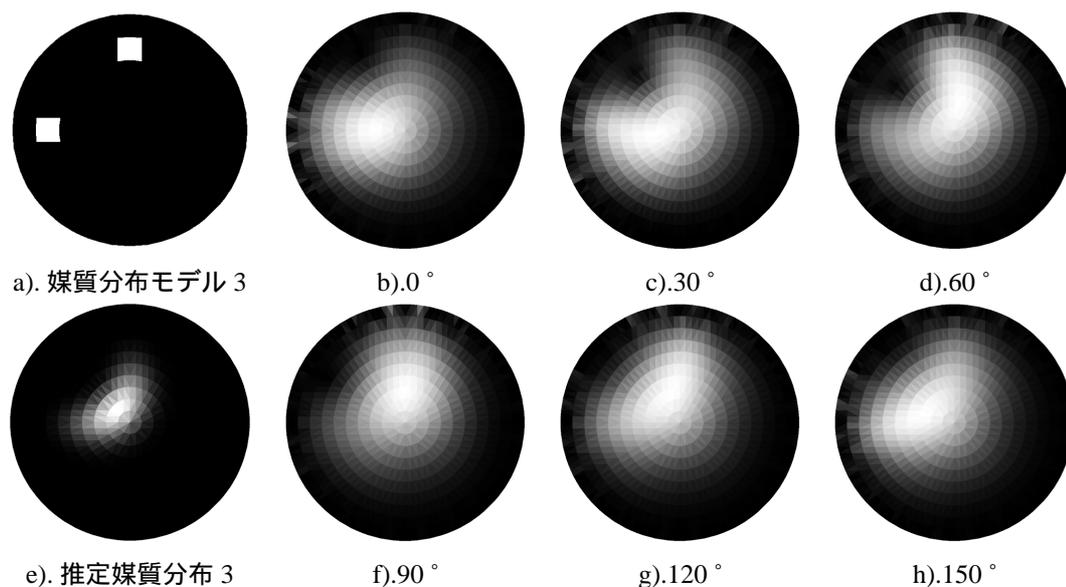


図 5.1.18: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

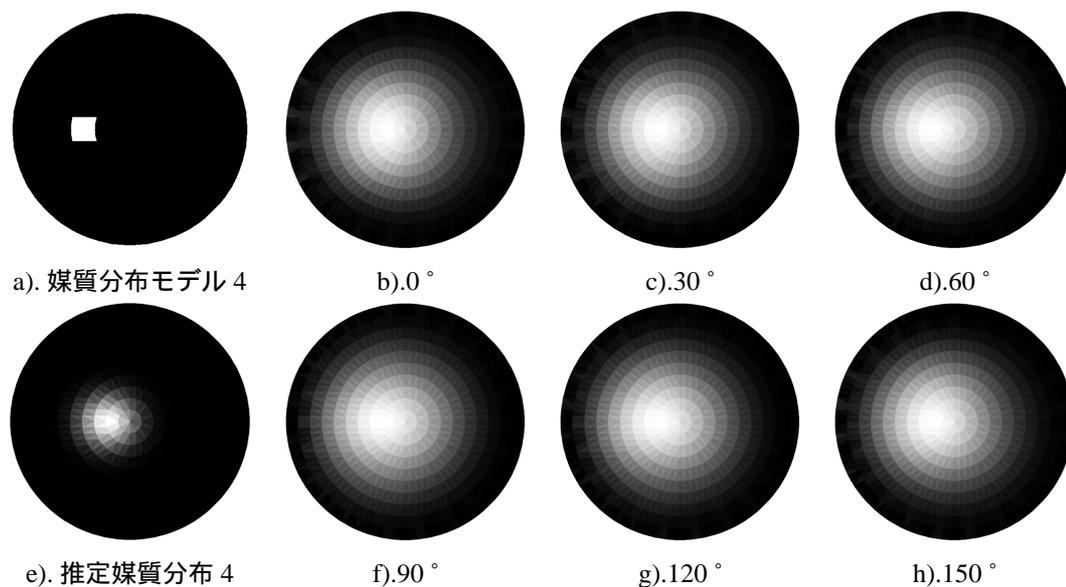


図 5.1.19: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

5.1.4 シミュレーション結果の考察

本章では、Sensitivity 行列法と電気双極子法の有効性について、有限要素法によるシミュレーションによって検証を行った。

図.5.1.1の結果から、Sensitivity 行列法では、安定した結果が得られないことが分かった。この結果は、Sensitivity 行列法における非合理性が確認されたと考えられる。

図.5.1.6の結果から、電気双極子法では、比較的安定した結果が得られることが分かった。ただし、正解の媒質分布における検出対象媒質部よりも、内側に検出結果を出力するという傾向が認められるため、理論改善が望まれる。

改善点としては、複数の電流通電パターンにおけるシステム方程式を一括して計算するための方法を考える必要があると考えられる。

5.2 実験による検証

5.2.1 実験の概要

第2章で述べた関数型トモグラフィ理論である，Sensitivity 行列法，電気双極子法について実験によって，その有効性の検証を行う．断層撮影対象には，直径 20cm のアクリル製円形トレイを用いる．トレイに水道水を水深 1cm まで満たし，異媒質部として，銅ブロック，発泡スチロール・ブロックをトレイ内に配置する．

Sensitivity 行列法におけるインピーダンス計測は，トレイ外周部に配置された銅版電極から，インピーダンス・アナライザを用いて行う．電気双極子法における断層撮影外周部電圧計測は，オシロスコープによって行う．これらの計測における電源周波数には，測定トレイの共振周波数を用いることとする．共振周波数を用いることで，断層撮影対象のインピーダンスのうち，リアクタンス成分の影響を，ほとんど無視できる．

以上のように，本章では実験を用いて，Sensitivity 行列法，電気双極子法の有効性について検証を行う．

5.2.2 Sensitivity 行列法の実験

2.2で述べた理論的背景を前提として Sensitivity 行列法の実験を行った．実験には断層撮影対象として，図.5.2.1のようなアクリル製円形トレイを用意し，インピーダンス・アナライザを用いて各電極組み合わせにおけるインピーダンスの測定を行った．装置の各パラメータは表.5.2.1に示すとおりである．

測定対象とするインピーダンスは抵抗成分とし，リアクタンス成分は考慮しない．測定対象周波数には測定対象トレイの共振周波数を用いることで，リアクタンスの影響を最小限にする．共振周波数とはリアクタンスが最小となる周波数である．図.5.2.2に示す，測定対象トレイの電極間インピーダンス周波数特性の測定結果から，測定対象周波数を 3[kHz] と決定した．

図.5.2.3 a)-d) は，実験に用いた検出対象の配置状態を表す．図.5.2.3 a), b) は検出対象として銅ブロックを用いた．図.5.2.3 c), d) は検出対象として発泡スチロール・ブロックを用いた．図.5.2.3 e)-h) は，測定されたインピーダンス変化量を用いて，Sensitivity 行列法によって得られた推定媒質分布である．図.5.2.3 e)-h) における白色部が，検出対象を表している．図.5.2.3 e), f) の結果は検出対象である銅ブロックの位置を検出できているとは評価しがたい．図.5.2.3 g), h) の結果は検出対象である発泡スチロール・ブロックの位置を比較的良好に検出していると考えられるが，安定した解であると評価することは難しい．

図.5.2.4は検出対象である銅ブロック，発泡スチロール・ブロックの有無による測定対象トレイのインピーダンス変化量を表す．図.5.2.4 a), b) は，基準媒質である水に対して導電率の高い銅ブロックが挿入されたことで領域全体のコンダクタンスが増加していることが分かる．図.5.2.4 c), d) は，基準媒質である水に対して導電率の低い発泡スチロール・ブロックが挿入されたことでコンダクタンスが減少している事が分かる．

図.5.2.4に示される測定値を用いて式 (2.2.5) を解いた結果が図.5.2.3 e)-h) である．

測定対象トレイ	アクリル樹脂製，直径 20cm，銅板電極 24 極 (H=2cm W=1cm D=0.3mm)，水深 1cm
検出対象物	銅ブロック (H=2cm W=2cm D=2cm)，発泡スチロールブロック (H=2cm W=2cm D=2cm)
Impedance Analyzer	HewlettPackard 4194A

表 5.2.1: Sensitivity 行列法の検証実験システムの各パラメータ

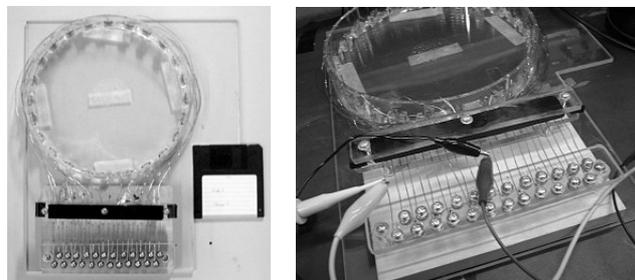


図 5.2.1: 測定対象とするアクリル製トレイ

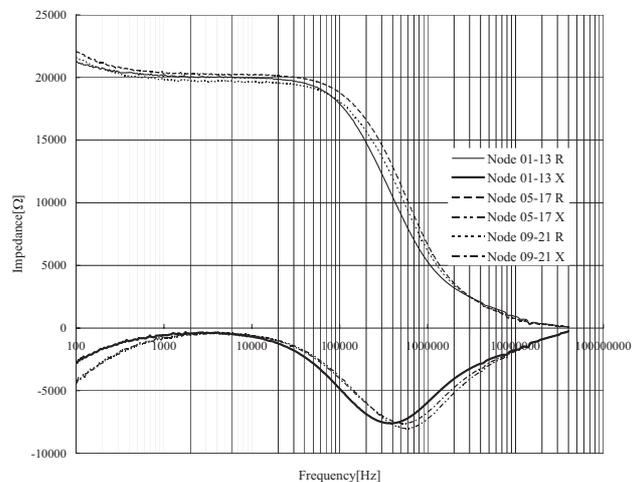


図 5.2.2: 測定トレイのインピーダンス周波数特性

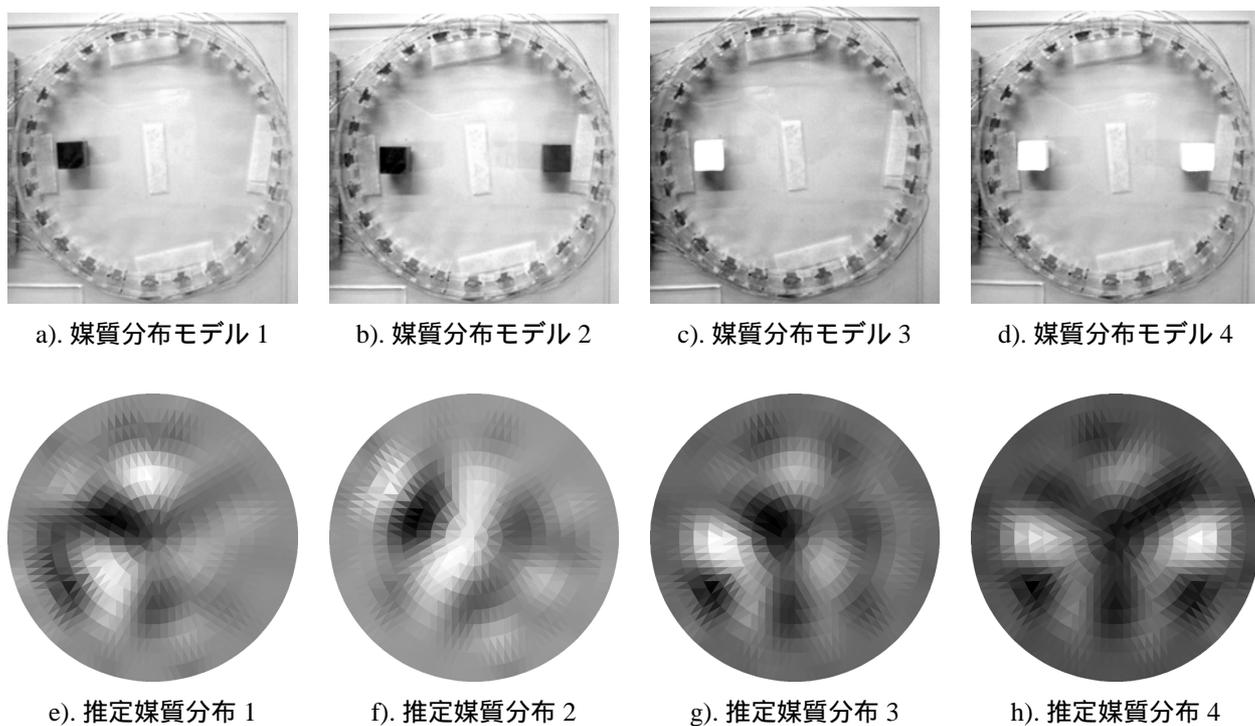


図 5.2.3: 正解の媒質分布と, Sensitivity 行列法による推定媒質分布

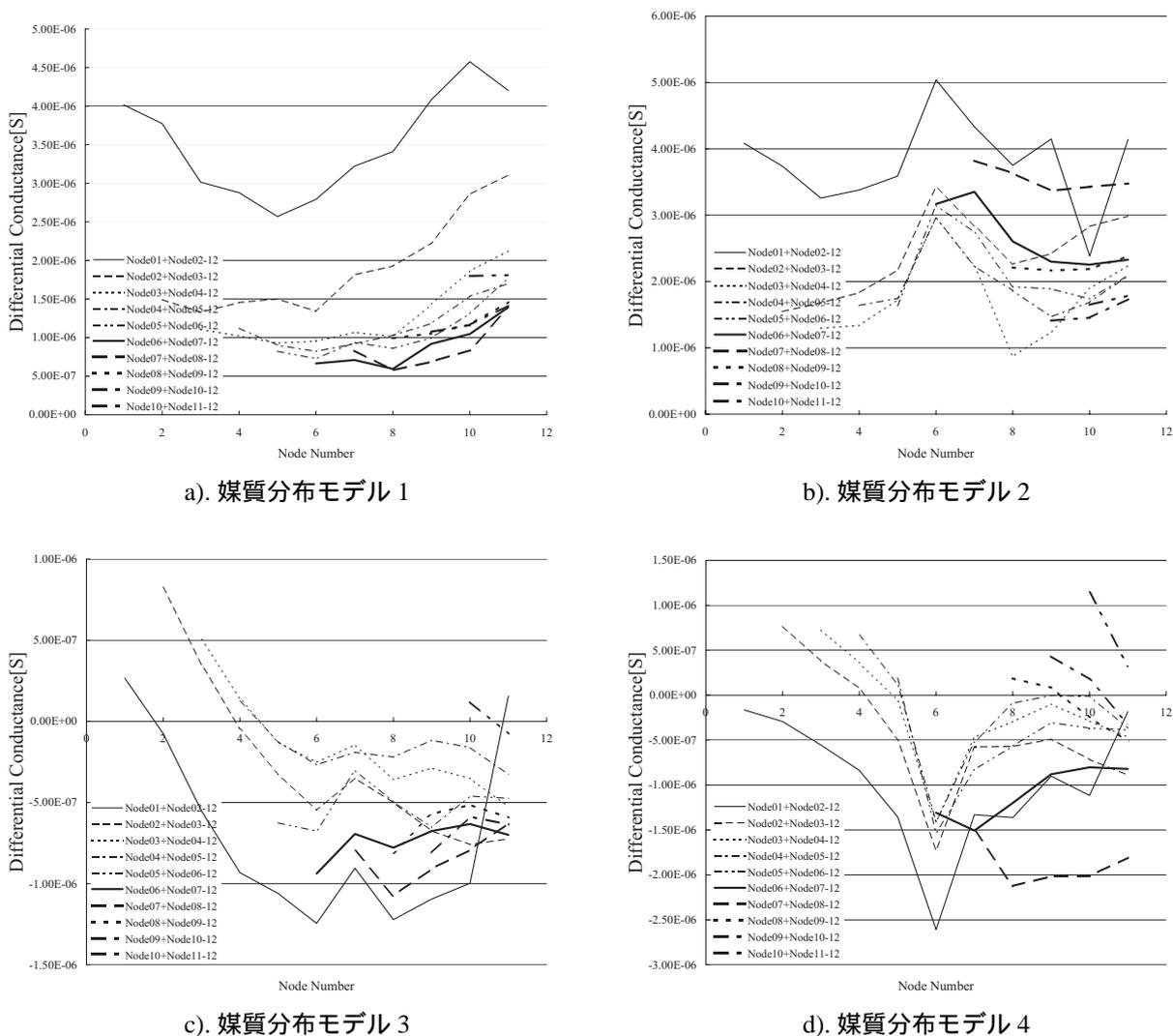


図 5.2.4: インピーダンス変化量

5.2.3 電気双極子法の実験

2.3で述べた理論的背景を前提として電気双極子法の実験を行った。電気双極子法の実験でも、断層撮影対象として図5.2.1のトレイを用い、図5.2.5のような実験システムを構築した。装置の各パラメータは表5.2.2に示すとおりである。電源の駆動周波数は測定対象トレイの共振周波数である3[kHz]とした。

図5.2.6 a)-d)は、実験に用いた検出対象の配置状態を表す。図5.2.6 a), b)は検出対象として銅ブロックを用いた。図5.2.6 c), d)は検出対象として発泡スチロール・ブロックを用いた。図5.2.6 e)-h)は、測定された断層撮影外周部の電圧変化を用いて、電気双極子法によって得られた推定媒質分布である。図5.2.6 e)-h)における白色部が、検出対象を表している。図5.2.6 e), f), h)の結果は、それぞれ検出対象である銅ブロック、発泡スチロール・ブロックの位置を比較的良好に検出していると考えられる。ただし、図5.2.6 a), b), d)に示される検出対象の配置よりも、内側に検出結果を示すという傾向が見られる。この傾向は図5.1.6 e), f), h)に示されるシミュレーション結果と同等である。図5.2.6 g)の結果は、検出対象である二個の銅ブロックを検出しているとは評価しがたい。

図5.2.7は検出対象である銅ブロック、発泡スチロール・ブロックの有無による断層撮影対象外周部の電圧変化を表す。図5.2.7のグラフから、断層撮影対象外周部の電圧変化は検出対象である銅ブロック、発泡スチロール・ブロックの存在する場所に近い電極で強く現れることが分かる。また、水に対して導電率が高い銅ブロックを挿入した場合と導電率が低い発泡スチロールを挿入した場合とでは外周部の電圧変化の傾向が相反していることが分かる。この結果は、検出対象媒質部に配置された電気双極子が、銅ブロックを挿入した場合と発泡スチロール・ブロックを挿入した場合とでは逆方向を向いていることを表している。

図5.2.7 a)に示される測定値を用いて、各電流通電パターンにおいて得られる式(2.3.4)を、それぞれ独立に解いて得られた電気双極子分布が図5.2.8である。図5.2.8 b), c), d), f), g), h)に示される電気双極子分布から、電流の通電パターンを変えても共通に電気双極子が検出される位置を抽出した結果が図5.1.6 e)である。図5.2.9, 図5.2.10, 図5.2.15についても同様である。

図5.2.8はシミュレーション結果である図5.1.12と比較してノイズの影響が出ていることがわかる。しかし、式(2.3.7)を用いた畳み込み演算後の結果にはノイズの影響が比較的現れていないことから、畳み込み演算にはノイズ低減処理的な効果が現れていると考えられる。

測定対象トレイ	アクリル樹脂製, 直径 20cm, 銅板電極 24 極 (H=2cm W=1cm D=0.3mm), 水深 1cm
検出対象物	銅 ブロック (H=2cm W=2cm D=2cm), 発泡スチロールブロック (H=2cm W=2cm D=2cm)
標準抵抗	1kΩ
Function Generator	KIKUSUI MODEL 4502
アンプ	NF Electronic Instruments 4025 HIGH SPEED POWER AMPLIFIER
オシロスコープ	YOKOGAWA DL7100

表 5.2.2: 電気双極子法の検証実験システムの各パラメータ

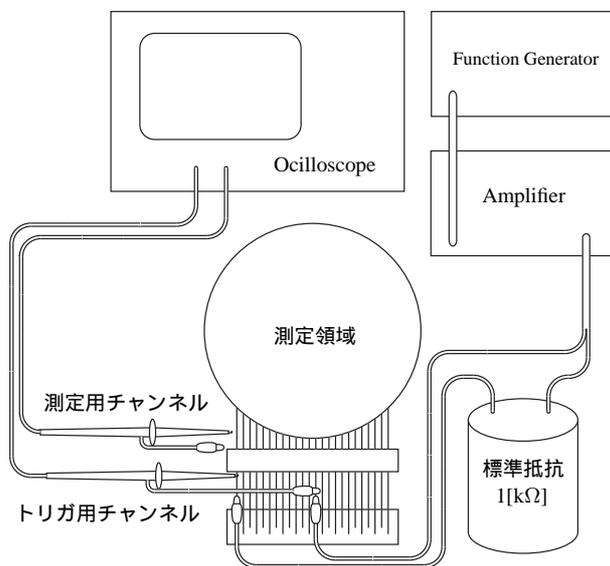


図 5.2.5: 電気双極子法の検証実験システム図

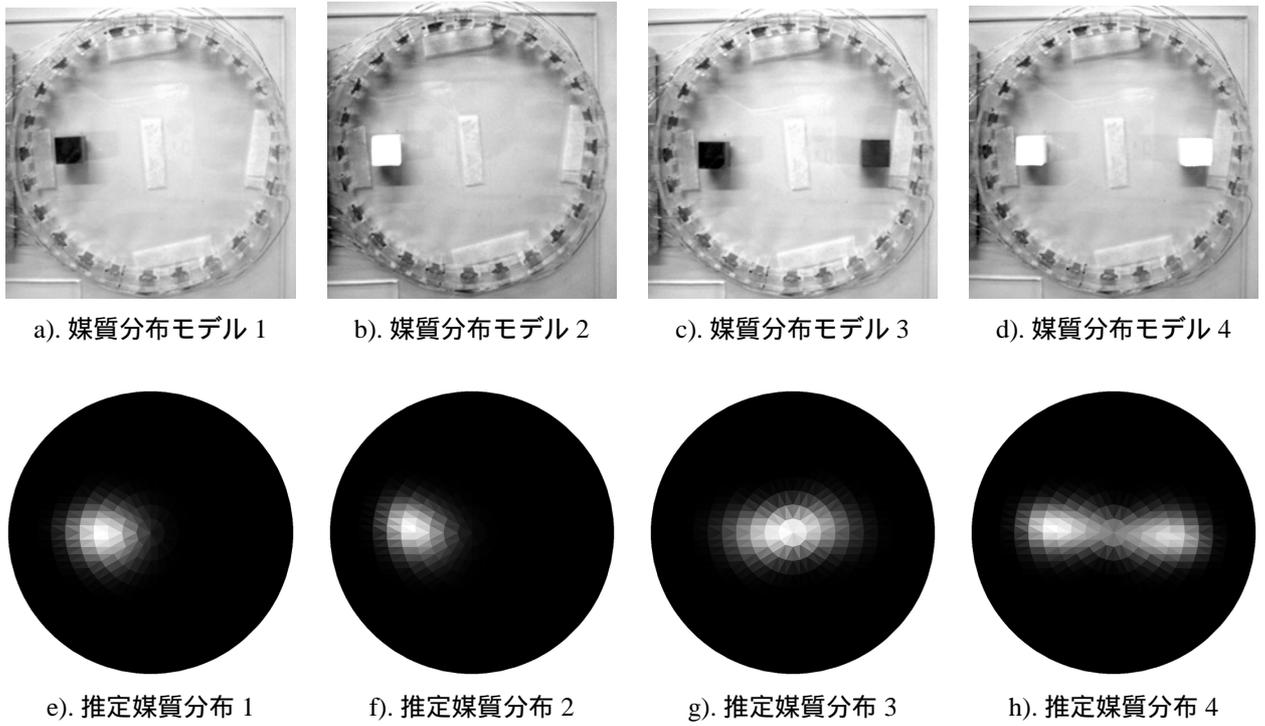


図 5.2.6: 正解の媒質分布と、電気双極子法による推定媒質分布

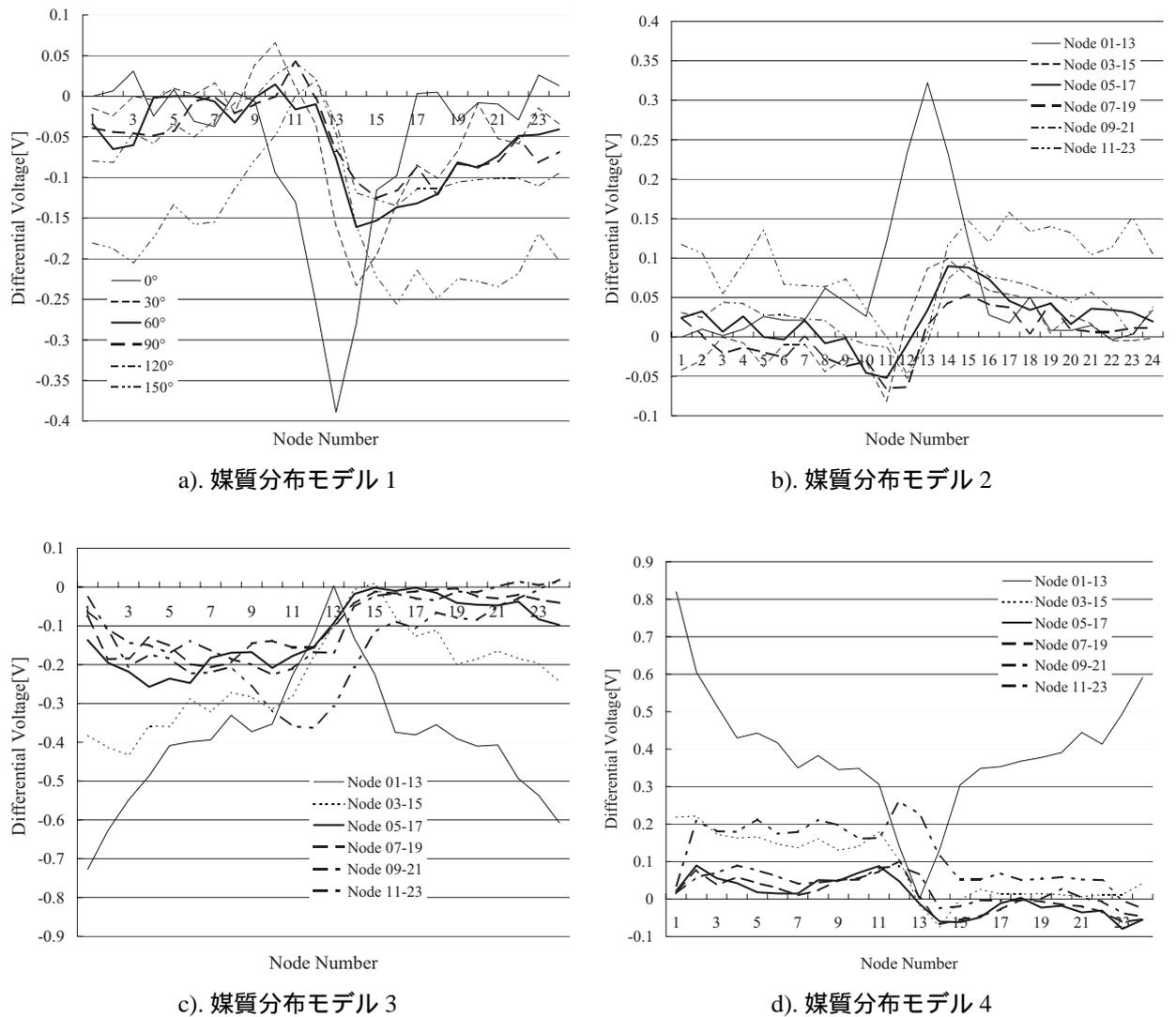
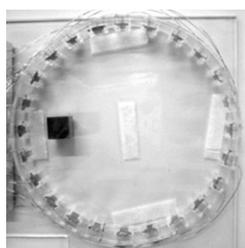
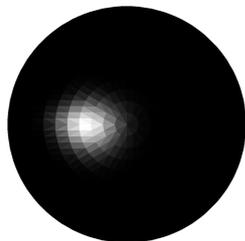


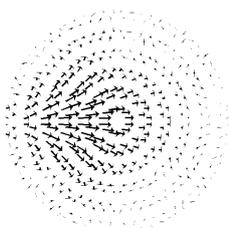
図 5.2.7: 領域外周部電圧分布



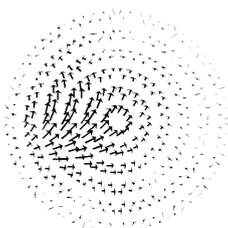
a). 媒質分布モデル 1



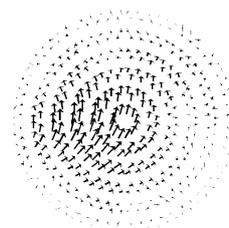
e). 推定媒質分布 1



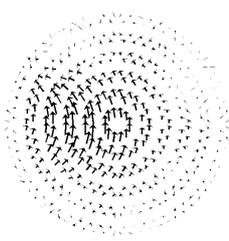
b). 0°



c). 30°



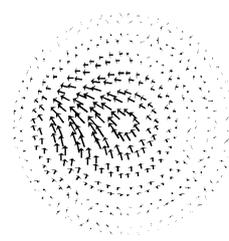
d). 60°



f). 90°

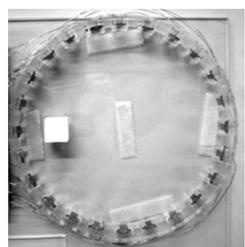


g). 120°

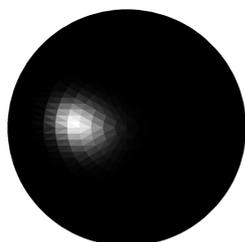


h). 150°

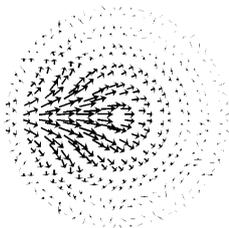
図 5.2.8: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布



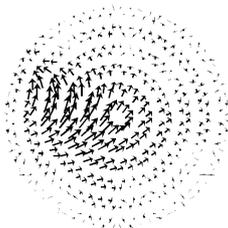
a). 媒質分布モデル 2



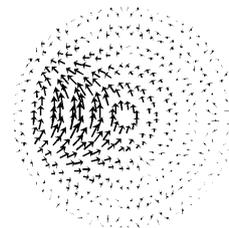
e). 推定媒質分布 2



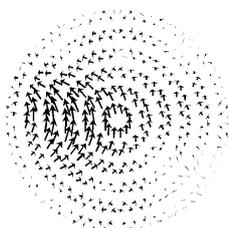
b). 0°



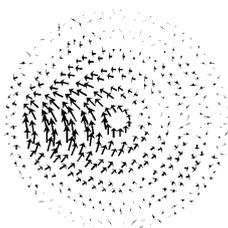
c). 30°



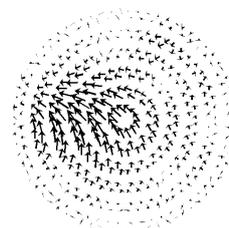
d). 60°



f). 90°

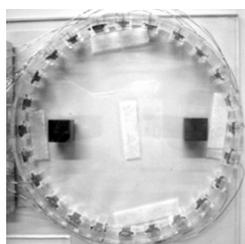


g). 120°

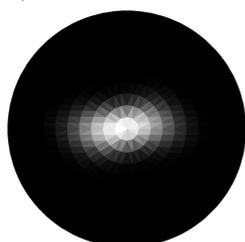


h). 150°

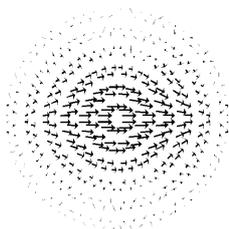
図 5.2.9: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布



a). 媒質分布モデル 3



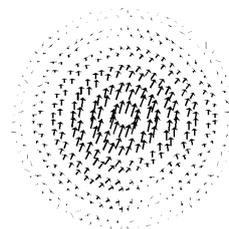
e). 推定媒質分布 3



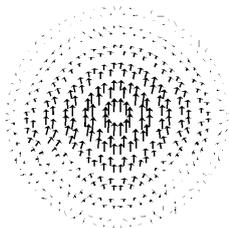
b). 0°



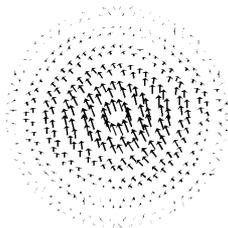
c). 30°



d). 60°



f). 90°



g). 120°



h). 150°

図 5.2.10: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布

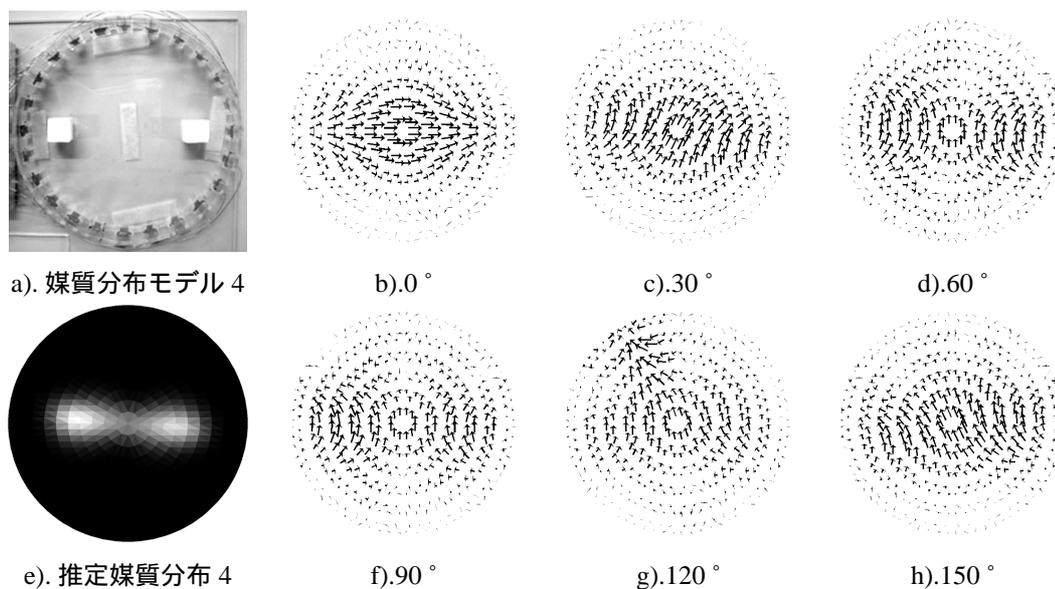


図 5.2.11: 式 (2.3.4) から得られた電気双極子分布

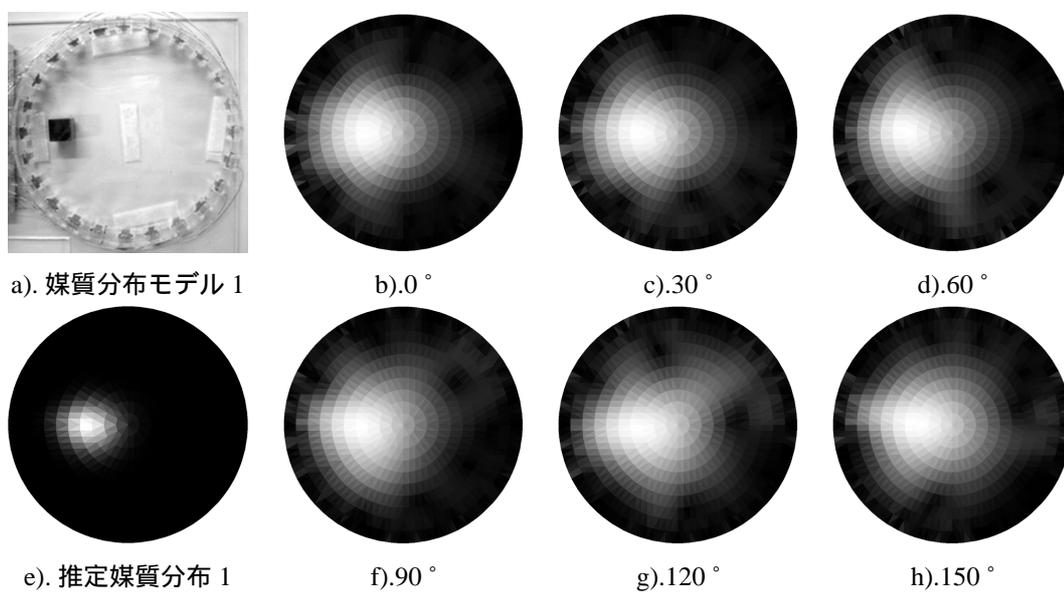


図 5.2.12: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

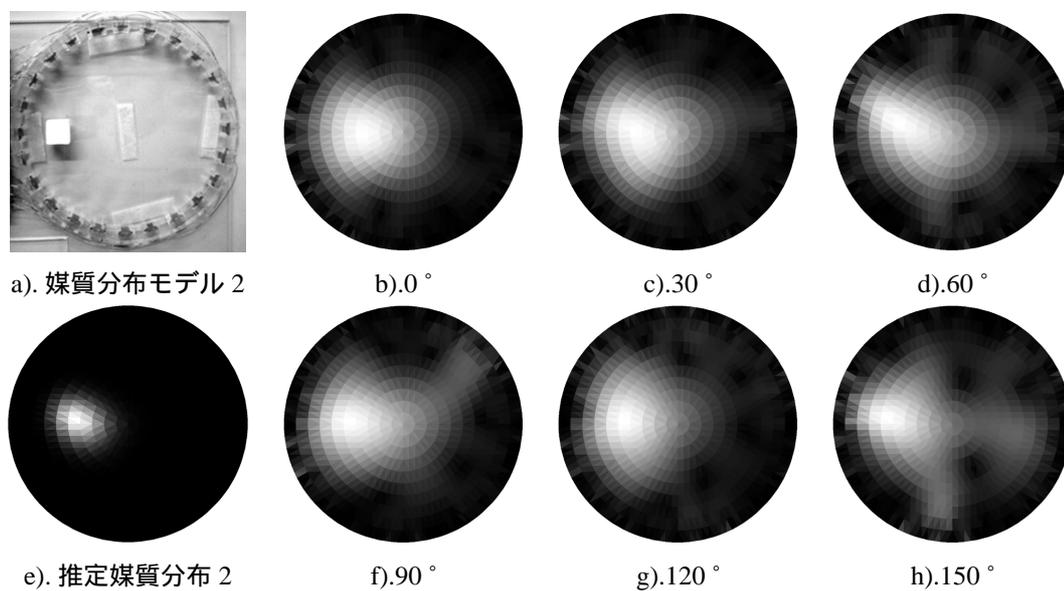


図 5.2.13: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

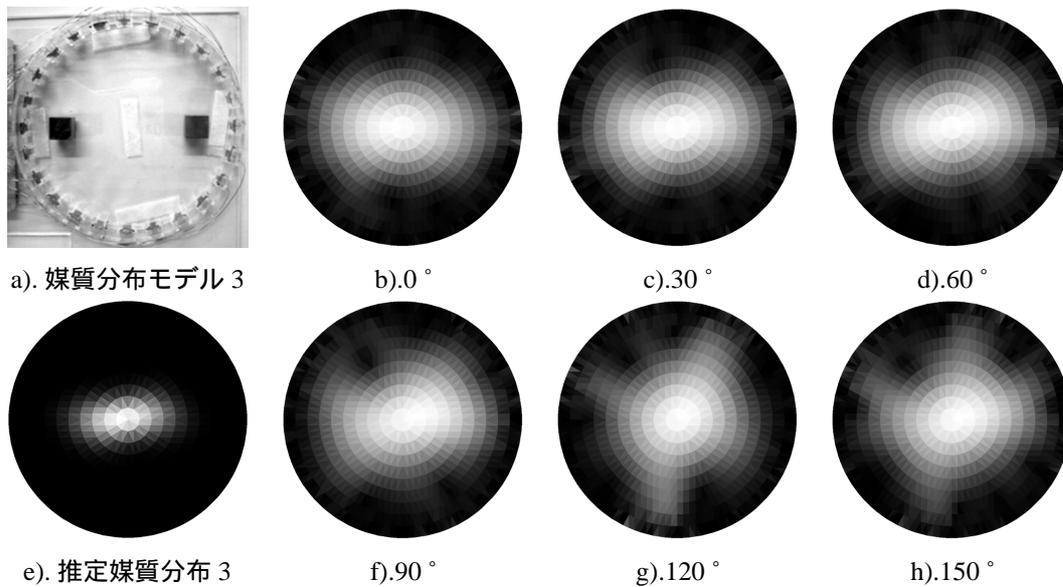


図 5.2.14: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

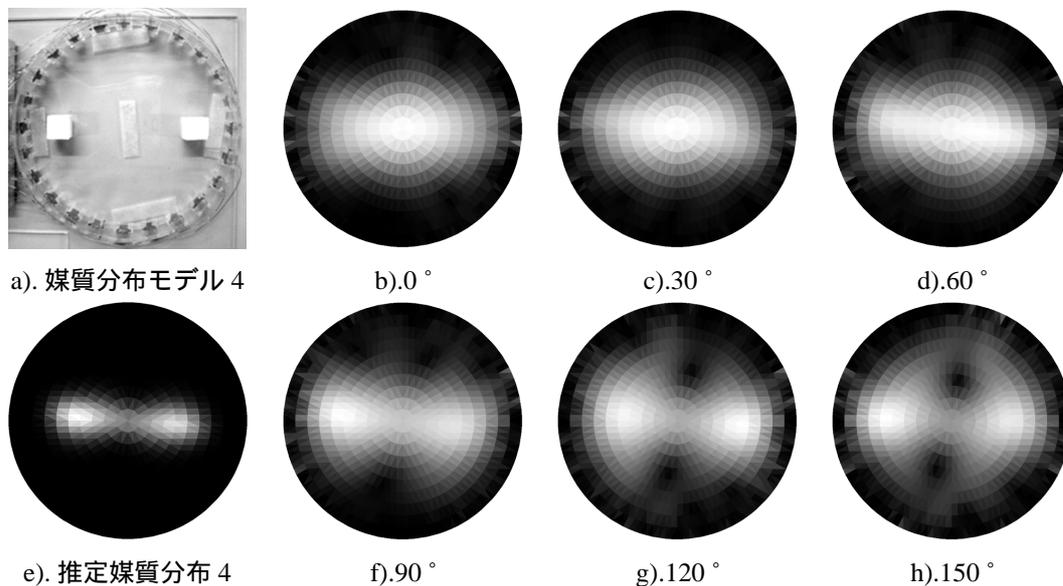


図 5.2.15: 電気双極子が有する電荷量の絶対値の分布

5.2.4 実験結果の考察

本章では、Sensitivity 行列法と電気双極子法の有効性について、実験によって検証を行った。

図 5.2.3 の結果から、Sensitivity 行列法では、図 5.1.1 に示されるシミュレーションと同様に安定した結果が得られないことが分かった。

図 5.2.6 の結果から、電気双極子法では、比較的安定した結果が得られることが分かった。ただし、正解の媒質分布における検出対象媒質部よりも、内側に検出結果を出力するという傾向が認められる。これらの結果は図 5.1.6 に示されるシミュレーション結果に近い結果である。

図 5.2.3, 図 5.2.6 の結果から、銅ブロックを検出対象とした場合、良好とは評価しがたい結果を示す傾向にあることが分かる。

第6章 結論

本論文では、関数型トモグラフィの研究として一般的な Sensitivity 行列法と筆者等が提唱する電気双極子法について、シミュレーションと実験によってそれらの有効性を検証した。電気双極子法は、抵抗素子に電流を流した際に生じる電圧降下が逆起電力で表すことができる点に注目し、その逆起電力を電気双極子として扱うことで、媒質パラメータ推定問題である電気インピーダンス・トモグラフィに電気双極子を用いた新たな定式化法である。

Sensitivity 行列法はシミュレーション、実験共に良好な結果が得られたとは評価しがたい。これらの結果は、Sensitivity 行列法の理論的限界を確認するものと言えるであろう。一方、電気双極子法はシミュレーション、実験共に比較的良好な結果が得られたと評価することができるであろう。よって、電気インピーダンス・トモグラフィにおける、媒質パラメータ推定問題を電気双極子分布探査問題へ定式化することの妥当性が検証された。

第 5.2 章における実験を通して、発泡スチロール・ブロックを検出対象とした場合について、シミュレーションに近い結果を得ることができた。このことから、Sensitivity 行列法、電気双極子法は、水と空気の分布を推定するような問題について応用が期待できる。具体的には、水道管の水流分布などが考えられる。

付録A Sensitivity行列法を用いたシミュレーション

A.1 キャパシタンス・トモグラフィ

キャパシタンス・トモグラフィは，断層撮影対象のキャパシタンス変化量を用いて断層撮影を行う．本節では Sensitivity 行列法を用いたキャパシタンス・トモグラフィのシミュレーションを行う．

有限要素法における空間エネルギーを表す汎関数は，式 (A.1.1) で表される．ただし，断層撮影対象領域内に対するエネルギー供給は電圧の形のみで表現されるものとする．

$$\begin{aligned} F(\phi) &= \int_S \mathcal{L}_E ds \\ &= \frac{1}{2} \int \epsilon (\nabla\phi)^2 ds \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

ここで， \mathcal{L}_E [J/m³] は電界起因単位体積あたりのエネルギー， ϵ [F/m] は空間の誘電率， ϕ [V] は電圧を表す．キャパシタンス・トモグラフィは断層撮影対象内の ϵ 分布を算出することを目的とする．

キャパシタンス・トモグラフィにおける Sensitivity 行列は式 (A.1.2) のように表される． $C_{i,j}$ [F] は任意の媒質分布状態 κ において， i, j の二電極を用いて計測されるキャパシタンスである． $C_{i,j}^a$ [F] は断層撮影対象領域内が基準誘電率 a [F/m] の媒質のみで構成されているときに， i, j の二電極を用いて計測される基準キャパシタンスである．

$$\begin{bmatrix} C_{1,1} - C_{1,1}^a \\ C_{1,2} - C_{1,2}^a \\ \vdots \\ C_{i,j} - C_{i,j}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{1,1} \\ C'_{1,2} \\ \vdots \\ C'_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1}^{r_1} & S_{1,1}^{r_2} & \dots & S_{1,1}^{r_k} \\ S_{1,2}^{r_1} & S_{1,2}^{r_2} & \dots & S_{1,2}^{r_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i,j}^{r_1} & S_{i,j}^{r_2} & \dots & S_{i,j}^{r_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = \mathbf{S}\epsilon \quad (\text{A.1.2})$$

$$S_{i,j}^{r_n} = \frac{1}{\beta} \frac{C_{i,j}^{r_n} - C_{i,j}^a}{C_{i,j}^{r_n} - C_{i,j}^a} \quad (\text{A.1.3})$$

$$\beta = \frac{D_n}{D_{all}} \quad (\text{A.1.4})$$

キャパシタンスの値は有限要素法の結果から式 (A.1.5) によって得ることができる． W [J] は領域の全エネルギーで，有限要素法における汎関数によって得ることが出来る． V [V] は二つの電極によって印加された電位差であり，これらから領域のキャパシタンス C [F] を求めることができる．

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{A.1.5})$$

以上を用いて，有限要素法によるキャパシタンス・トモグラフィのシミュレーションを行う．断層撮影対象外周部に設置する測定電極は 12 極とし，領域内の離散化は 432 要素とした．

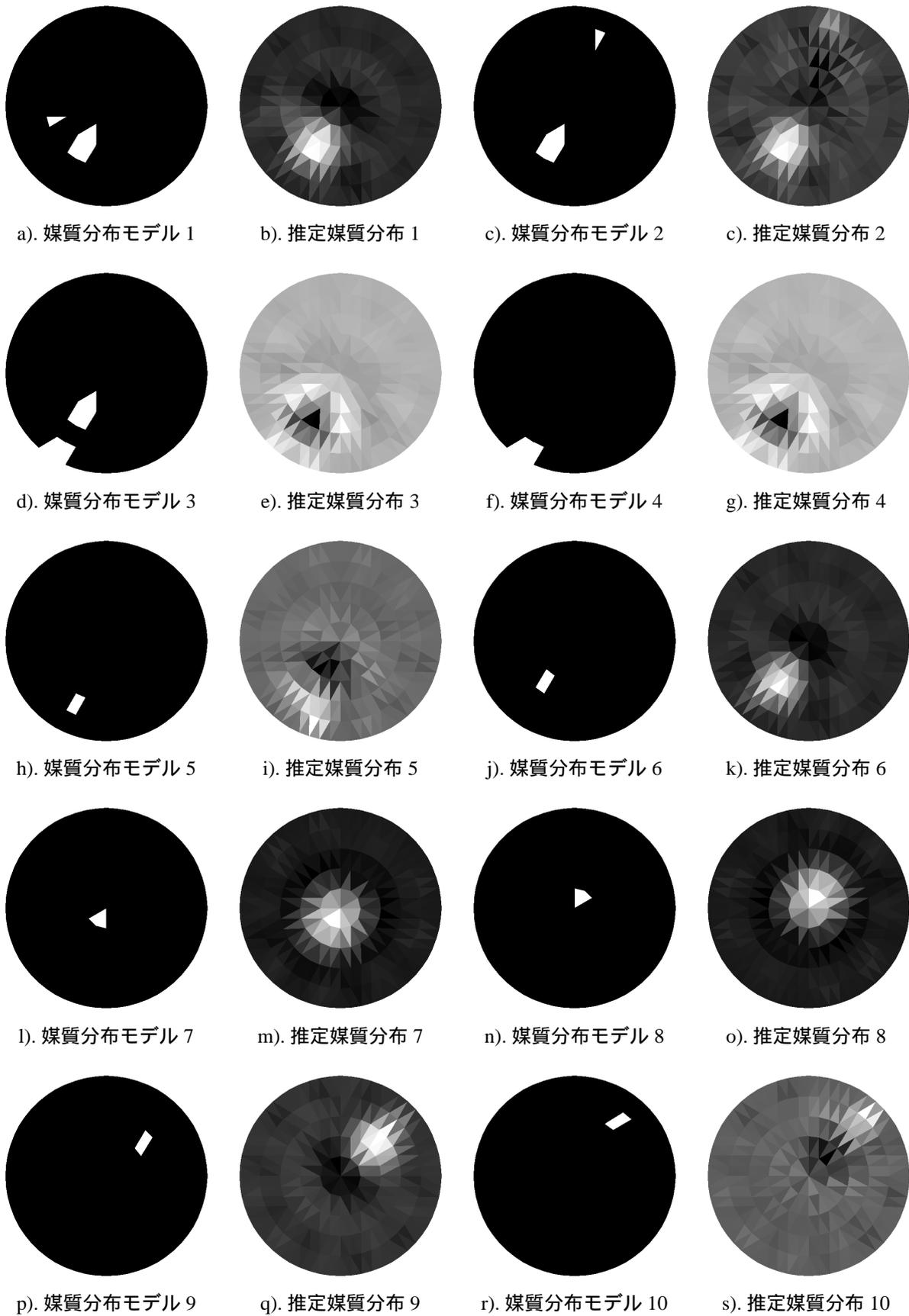


図 A.1.1: 正解の媒質分布と, Sensitivity 行列法による推定媒質分布

A.2 磁気トモグラフィ

磁気トモグラフィは、断層撮影対象のインダクタンス変化量を用いて断層撮影を行う。本節では Sensitivity 行列法を用いた磁気トモグラフィのシミュレーションを行う。

有限要素法における空間エネルギーを表す汎関数は、式 (A.2.1) で表される。磁気トモグラフィでは、断層撮影対象への働きかけを磁束によって表す。よって、Poisson の方程式を用いて空間を表現する必要がある。

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{A}) &= \int_S (\chi_B + \chi_J) ds \\
 &= \int \frac{1}{2} \nu \mathbf{B}^2 ds - \int J \mathbf{A} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int \nu (\nabla \times \mathbf{A})^2 ds - \int J \mathbf{A} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_S \{ \nu (\nabla \times \mathbf{A})^2 - 2J \mathbf{A} \} ds
 \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

ここで、 $\chi_B [\text{J/m}^3]$ は磁界起因単位体積あたりのエネルギー、 $\chi_J [\text{J/m}^3]$ は電流起因単位体積あたりのエネルギー、 $\mathbf{A} [\text{Wb/m}]$ はベクトルポテンシャル、 $\mathbf{B} [\text{Wb/m}^2]$ は磁束密度、 $\nu [\text{m/H}]$ は磁気抵抗率、 $J [\text{A/m}^2]$ は電流密度を表す。磁気トモグラフィは $J [\text{A/m}^2]$ によって断層撮影対象へ磁束を注入し、断層撮影対象内の ν 分布を算出することを目的とする。

磁気トモグラフィにおける Sensitivity 行列は式 (A.2.2) のように表される。 $L_{i,j} [\text{H}]$ は任意の媒質分布状態 ν において、 i, j の二電極を用いて計測されるインダクタンスである。 $L_{i,j}^a [\text{H}]$ は断層撮影対象領域内が基準磁気抵抗率 $\nu [\text{m/H}]$ の媒質のみで構成されているときに、 i, j の二電極を用いて計測される基準インダクタンスである。

$$\begin{bmatrix} L_{1,1} - L_{1,1}^a \\ L_{1,2} - L_{1,2}^a \\ \vdots \\ L_{i,j} - L_{i,j}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L'_{1,1} \\ L'_{1,2} \\ \vdots \\ L'_{i,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,1}^{r_1} & S_{1,1}^{r_2} & \dots & S_{1,1}^{r_k} \\ S_{1,2}^{r_1} & S_{1,2}^{r_2} & \dots & S_{1,2}^{r_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i,j}^{r_1} & S_{i,j}^{r_2} & \dots & S_{i,j}^{r_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}' = \mathbf{S} \boldsymbol{\nu} \tag{A.2.2}$$

$$S_{i,j}^{r_n} = \frac{1}{\beta} \frac{L_{i,j}^{r_n} - L_{i,j}^a}{L_{i,j}^b - L_{i,j}^a} \tag{A.2.3}$$

$$\beta = \frac{D_n}{D_{all}} \tag{A.2.4}$$

インダクタンスの値は有限要素法の結果から式 (A.2.5) によって得ることができる。 $W [\text{J}]$ は領域の全エネルギーで、有限要素法における汎関数によって得ることが出来る。 $I [\text{A}]$ は断層撮影対象領域へ注入される電流値であり、これらから領域のインダクタンス $L [\text{H}]$ を求めることができる。

$$W = \frac{1}{2} L I^2 \tag{A.2.5}$$

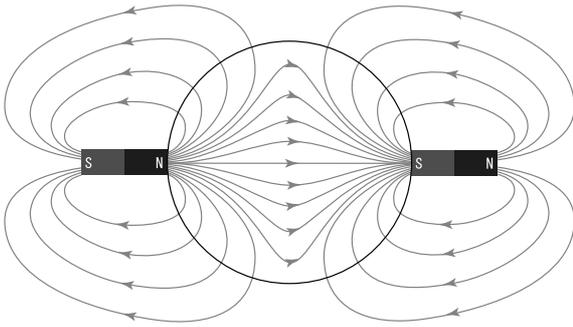


図 A.2.1: 二本の磁石による磁界印加

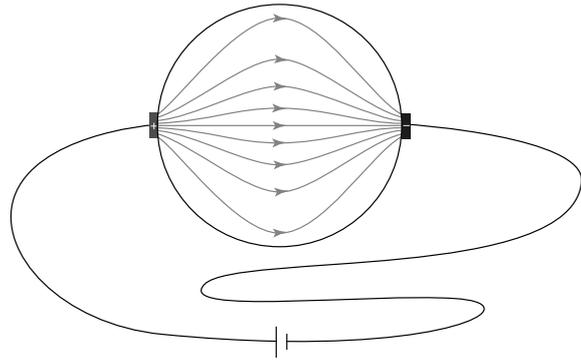


図 A.2.2: 向かい合わせた電極間の電束

キャパシタンストモグラフィーは、対象領域に電界を印加して、その反応を元にして内部の誘電率分布を推定した。電界をかけるということは、電束を領域内に通していることになる。磁気トモグラフィーでは、磁束を領域内に通し、その反応を元にして内部の透磁率分布を推定することを目的とすることにする。

磁束を領域内に通すということで、領域の外部から二本の磁石を用いて磁界を印加すると図 A.2.1のように磁束が通ることになる。向かい合わせた磁極よりも磁石自身が持つ逆極への距離の方が短く、磁石から発生した多くの磁束は、磁石自身の持つ逆極へと向かうことになってしまうと考えられる。

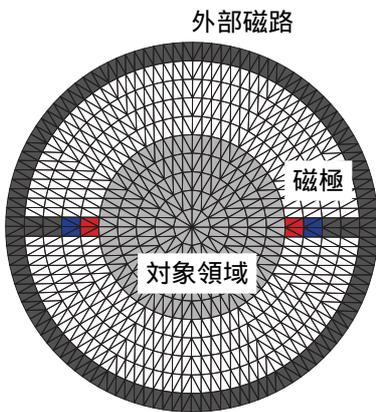


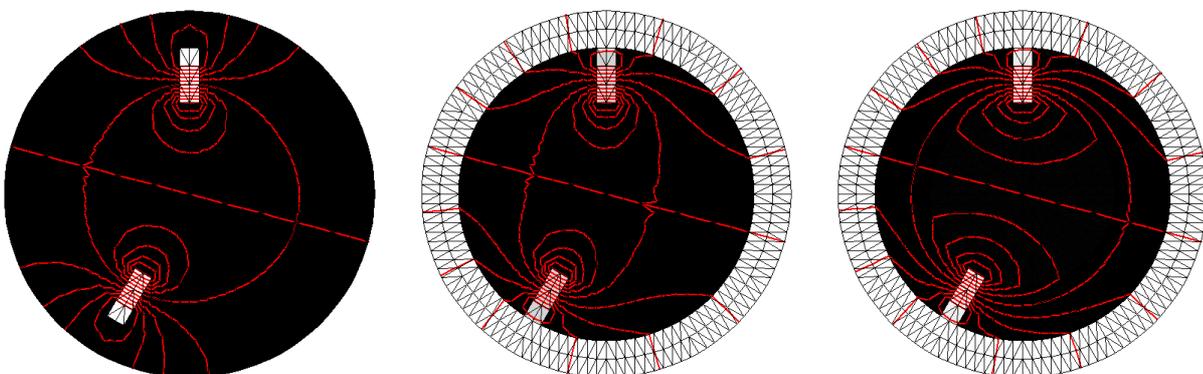
図 A.2.3: 外部磁路を持たせた二つの磁石

キャパシタンストモグラフィーにおいてはこのような電束の振る舞いについて考慮することなく電極を向かい合わせたのだが、向かい合わせた電極間での電束の振る舞いは図 A.2.2のようになっていると考えることができる。図を見て分かる通り、向かい合わせた電極は一つの電極対であり、向かい合わされた電極へと電束が向かうことが最もエネルギーが少なく済むと考えられる。

磁気トモグラフィーにおいては、電極の代わりに磁束を発生させる磁石、電磁石などを用いる必要があるわけだが、一般に磁石、電磁石は構造的にどうしても自身の持つ極間の距離が短くなる。そのままトモグラフィーの磁界印加に用いると図 A.2.1のように、対象領域へ磁束が向かわずに、中心付近は反応が取りにくい可能性がある。

そこで、図 A.2.3のように、磁極の内二つを強磁性体で閉じてしまえば、事実上、場に存在する磁極は二つということになる。ただし、強磁性体と空気の透磁率の差は導体と空気の誘電率の差に比べて少ないため、いくら磁性体で磁路を作ったとしても、やはり逆極の影響をある程度考慮する必要がある。

そこで、磁気トモグラフィー装置としては二本の磁束発生磁石と、その磁石同士をつなぐ外部磁路を用意し、その上で、Sensitivity 行列構築のためのシミュレーションは外部磁路の存在も考慮に入れたモデルで行う。



a). 外部磁路が無い場合 b). 外部磁路がある場合 c). 領域に磁性体を入れた場合

図 A.2.4: FEM による等ポテンシャル線

図 A.2.4は外部磁路がある場合と、無い場合とでの等ポテンシャル線の違いである．図 A.2.4 a). は外部磁路がない場合である．ポテンシャルが磁石自身の持つ逆極へと引っ張られていることが分かる．b). は外部磁路を導入した場合である．外部磁路によって等ポテンシャル線が大きく変化してしまっている．c). は対象領域に外部に対して 10 倍の透磁率をあたえた場合である．この場合は対象領域のポテンシャル線がキャパシタンストモグラフィーの場合とほとんど変わらないものになっている．

図 A.2.4 b). で外部磁路と対象領域との距離を十分に離せば外部磁路による対象領域への影響は、かなり減らせると考えられるが、図 A.2.4 c). のように対象領域とその外側の領域との透磁率に 1/10 程度の差を持たせることでも対象領域内のポテンシャル分布を理想的なものへと近づけることが出来ること分かる．

有限要素法の項目でも出てきているのだが、磁束の通りやすさは透磁率 μ [H/m] の逆数である磁気抵抗率 ν [m/H] によって決まるので、透磁率は小さい方が良い．

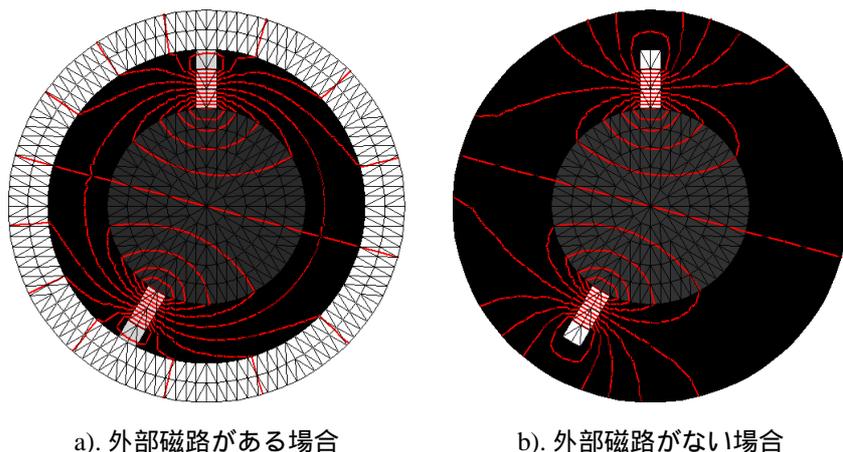


図 A.2.5: FEM による等ポテンシャル線

本研究ではシミュレーションとして、対象領域内の透磁率を外部の 1/100 にして考えてみることにする．鉄の透磁率が空気の透磁率に対しておよそ 10^{-2} である．つまり、トモグラフィー対象を鉄中に含まれる異物検査という事例を想定したと考えることが出来るだろう．

図 A.2.5によれば、外部磁路を導入しても、導入しなくても磁極間のポテンシャル分布にはほとんど変化が無い．つまり、外部磁路の導入によって、トモグラフィー対象領域でのポテンシャル分布を変化させること無く、磁石自身の持つ逆極へのエネルギー流出を抑えることが可能である．

これらの前提条件を踏まえた上で、トモグラフィー領域を満たす磁性体の透磁率の 1/2 の透磁率を持つ異物を検出するシミュレーションを行った．対象領域は鉄で埋め尽くされているものとしたので、その 1/2 の透磁率を持つものとしては鉛などが挙げられる．図.A.2.6にシミュレーション結果を示す．

それと分かるような結果は出ているが、キャパシタンストモグラフィーの場合と比べてかなり精度が悪くなっている．やはり、トモグラフィー対象領域と外部磁路との距離が近いことが影響していると考えられる．

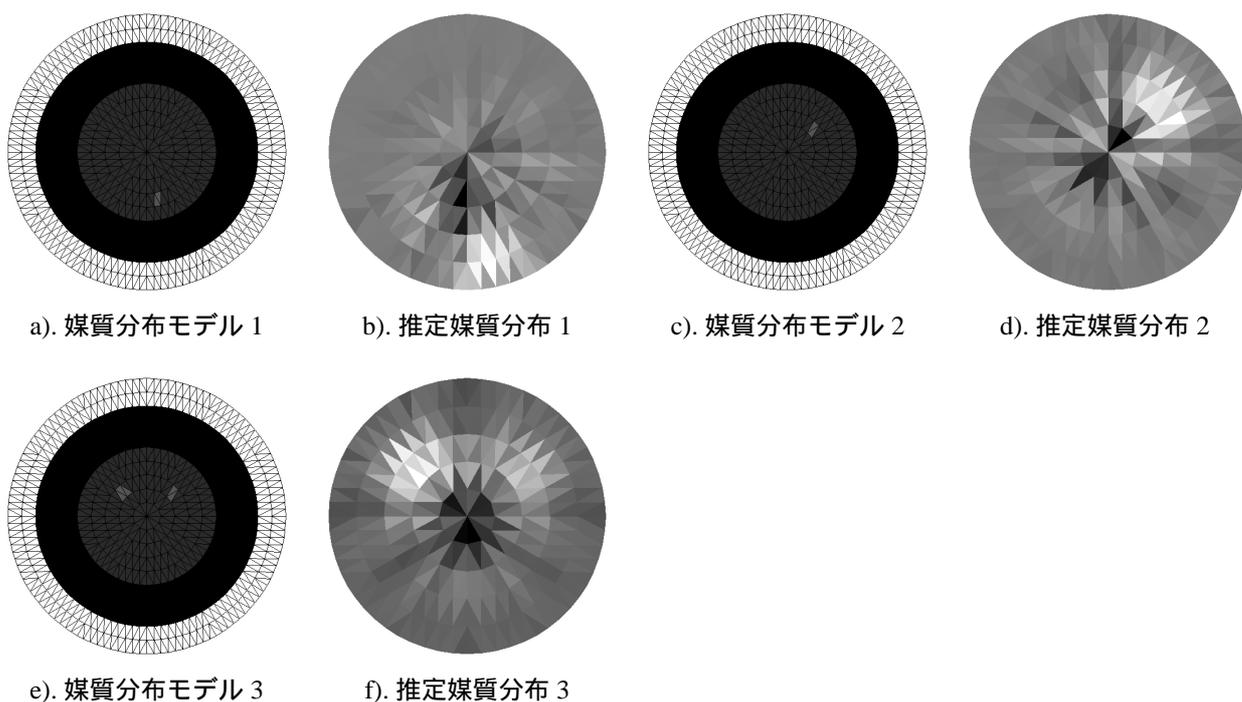


図 A.2.6: 正解の媒質分布と、Sensitivity 行列法による推定媒質分布

参考文献

- [1] H. Tian, W. He, and Y. Saito, A Study of Reconstruction Algorithm for Electrical Impedance Tomography , The 2nd Japan, Australia and New Zealand Joint Seminar, pp.24-25, Kanazawa Japan, January 2002.
- [2] T. Murai, and Y. Kagawa, Electrical impedance computed tomography based on a finite element model, IEEE Trans. Biomed. Eng. Vol.32, pp.177-84, 1985.
- [3] H. Endo, S. Hayano, Y. Saito, and K. Miya, Generalized vector sampled pattern matching method-theory and applications Electromagnetic Nondestructive Evaluation, Studies Appl. Electromagn. Mech, pp.285-92, 2002.
- [4] 武居昌宏, 李輝, 越智光昭, 齋藤兆古, 堀井清之, ”サンプルドパターン・マッチング法による固気二相流 CT 画像の再構成”, 可視化情報学会論文集, Vol.22, No.9, pp.71-78, 2002.
- [5] G. Dong, R. Bayford, S. Gao, Y. Saito, R. Yerworth, D. Holder, W. Yan, The application of the generalized vector sample pattern matching method for EIT image reconstruction, Physiol. Meas., pp.449-466, 2003
- [6] H. Saotome, T. Doi, S. Hayano, Y. Saito, Crack identification in metallic materials, IEEE Transaction on Magnetics Vol. MAG-29, No.2, March, pp.1861-1864, 1993
- [7] 音川英一, 早野誠治, 齋藤兆古, 堀井清之, ”パラメタ推定に関する逆問題とその関数型トモグラフィーへの応用”, 可視化情報学会論文集, Vol.23, No.1, pp.103-106, 2003.
- [8] 音川英一, 早野誠治, 齋藤兆古, ”電気インピーダンス法に関する一考察”, 電子情報通信学会技術研究報告 , Vol.103 No.564, pp.91-98, 2004.
- [9] 音川英一, 早野誠治, 齋藤兆古, 堀井清之, ”電気インピーダンス法による導電率分布可視化とその実験的検証”, 可視化情報学会論文集, Vol.24, No.1, pp.255-258, 2004.