

學位記

福岡県

斎藤 兆古

昭和二十一年七月二十四日生

論文 加形誘導電動機の空間高調波に関する研究

本學大學院 工學 研究科電氣工學專攻の博士課程に
おいて所定の單位を修得し學位論文の審査および最終
試験に合格したよつて工學博士の學位を授與する

昭和五十年二月二十二日

法政大學



總長

中村 哲



工學研究科第二號

齊藤兆古学位論文審査報告書

論文題名 「かご形誘導電動機の空間
高調波に関する研究」

齊藤 兆古 学位論文の要旨

論文題名 「かご形誘導電動機の空間高調波に関する研究」

最近電子計算機およびその利用技術の発達に伴ない、従来考えられなかった詳細な計算が可能となり、各種産業用機器について逐次精度の高い設計製作が可能となりつつある。これらの各種産業用機器の大部分は電動機をその動力源としていることから、電動機的设计もより高精度化することが必要となりつつある。各種電気機械回転機のなかで、かご形誘導電動機は構造が簡単で取扱い簡単であることから、最も多く使用されている電動機である。しかし、かご形誘導電動機では、二次の各一相が各々一本の導体によって形成されるため、空間高調波の影響が簡単に除去できない問題点がある。従来の比較的簡単な設計理論においても、空間高調波に起因する異状現象が無視できず、多くの研究が空間高調波についてなされ、従来の空間高調波に関する研究で、一応の成果は得られているものの、現在必要とされている高精度の設計には不十分であり、特に一次二次間の空間高調波の干渉によって発生する磁気騒音について根本的な解決法は明かにされていない。かご形誘導電動機の低騒音化の課題は現在も設計上重要な問題点である。また、空間高調波に起因する異状トルク現象も、現在必要となりつつある高精度な設計のためには依然として重要な問題点である。

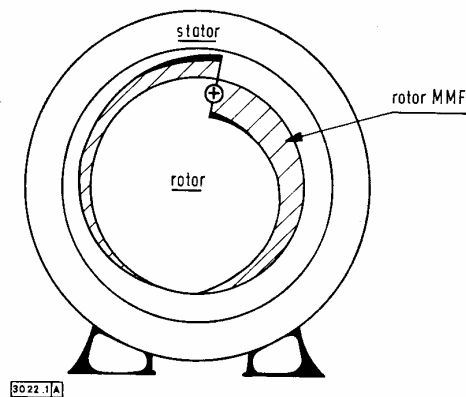
本論文は、かご形誘導電動機の高精度な設計に最も有力な空間高調波に関する新理論とその応用例を述べたものである。

すなわち第1章第1節では、空間高調波に関する従来の理論の概要と本論文の理論の概要を述べ、第1章第2節では、空間高調波に起因する異状現象の概要を述べている。

第2章第1節では、多相かご形誘導電動機を一次 m 相二次 n 相の対称機としてモデルを設定し、エネルギー関数を用いて、従来の理論とは異なる基礎方程

式を誘導している。従来の理論と異なる主な点は、①二次一相の起磁力分布を第1図に示す形で導入したことから、②基礎方程式中の一次二次間の相互インダクタンス行列に、極対数 p が回転角の関数として含まれること、さらに③一次と二次それぞれのインダクタンス行列は、一次側、二次側それぞれの発生する空間高調波次数だけの関数として表現されること等である。

第2章第2節では、前節で述べた $m-n$ 対称機の基礎方程式を、



第1図

m 相 n 相対称座標行列を用いて座標変換を行ない、座標変換の過程から、一次相数 m 、二次相数 n さらに極対数 p の関係によって、 $m-n$ 対称機の基礎インピーダンス行列が4個のケースに分類されることを示している。一次相数 m 二次相数 n さらに極対数 p によって基本式が明確に異なってくること、すなわち電流を算出する方法が異なってくることが従来の理論では、明らかにされていなかったが、本論文では極めて明確に、基本式（座標変換された基礎方程式）が4個のケースに分類されることを明らかにしている。

第2章第3節では、第2章第2節で4個のケースに分類された基本式を、各ケースについて解き、電流とトルクを算出している。（第1）のケースは、一次回路に空間高調波次数の組み合わせによって異なる各種の高調波電流が流れ、起動時同期クローリングを発生する。（第2）のケースは、一次回路に一連の空間高調波次数の組み合わせによって、一種類の高調波電流が流れ、電動機領域

において回転同期クローリングを発生する。(第3)のケースは、第2のケースと同様に、一次回路に一連の空間高調波次数の組み合わせによって、一種類の高調波電流が流れ、制動機領域において回転同期クローリングを発生する。(第4)のケースは、一次に高調波電流は流れず、発生する異状トルクは、非同期クローリングのみとなる。

上述の異状トルク発生条件は、従来の理論や実験結果と定性的に全く一致する。しかし、定量的にはかなり異なり、(第1)のケースでは、電流の厳密な算出は簡単でなく、電流は級数で表現されること、(第2)、(第3)のケースでは、特定の空間高調波の組み合わせを連立して電流を算出しなければならないこと等を明かにしている。

第2章第4節では、基本式(変数係数線形連立微分方程式)を定数係数線形連立微分方程式に変換するための空間高調波に対する整流行列を誘導し、さらに整流行列で基本式を座標変換し、定数係数線形連立微分方程式を誘導し、定数係数線形連立微分方程式から定常状態の等価回路を得ている。等価回路の一例を第2図に示す。

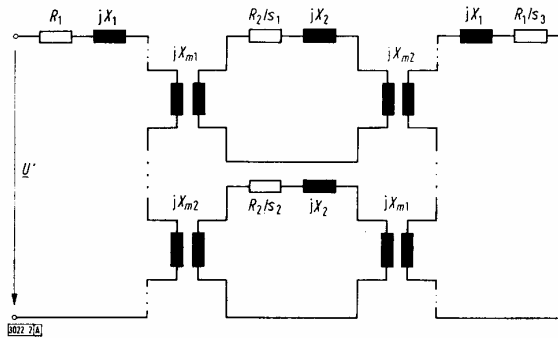


Figure 2. Steady state equivalent circuit of case (2).

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \omega \{(n/2) \sum L_v + l_1\}; & X_2 &= \omega \{(n/2) \sum L_{gn+\gamma} + l_2\}; \\
 X_{m1} &= \omega (m n)^{1/2} / 2 \{M_{gn+\gamma}\}; & X_{m2} &= \omega (n n)^{1/2} / 2 \{M_{1+g'n+\gamma}\}; \\
 s_1 &= \omega - (gn + \gamma) [(1-\delta) \omega] / p / \omega; & s_2 &= \omega - (1 + g'n - \gamma) (1-\delta) \omega / p / \omega \\
 s_3 &= \omega - (1 + g' - \gamma) (n/p) (1-\delta) \omega / \omega;
 \end{aligned}$$

第 2 図

第2章第5節では、エネルギー関数法とテンソル変換の結合に基づく本論文の手法を単相誘導電動機に適用し、従来全く明らかにされていなかった単相誘導電動機の空間高調波に起因する諸現象を明らかにしている。特に従来全く知られていなかった単相誘導電動機の同期クローリングの存在を明らかにしている。

第2章第6節では、二次一相の起磁力分布が第1図に示してある形であることおよび第2章第1～5節の理論で得られた結果を用いて、騒音の源となる分布力のシミュレーションモデルの作成について述べている。

第3章第1節では、第2章で述べた異状トルクに関する理論の数値計算による検討と実験値との比較を述べている。多相かご形誘導電動機の異状トルク現象については、比較的多くの実験例が従来から示されていることから、本論文では、特に同期クローリングについて、近似計算値と厳密計算値の比較について論じている。単相誘導電動機の異状トルク現象については、従来からほとんど知られていないことから、本論文では、実験値と計算値の比較を行ない、本理論の妥当性を吟味している。

第3章第2節では、空間高調波に起因する磁気騒音について述べている。

一次側（固定子）と二次側（回転子）間の空間高調波の干渉によって発生する磁気吸引力が固定子枠上に分布し、固定子枠を周期的に変形するために騒音が発生する。本論文では、固定子枠の機械的運動方程式としては、従来の理論で知られている方程式を使用し、従来全く明らかにされていない単相誘導電動機について、計算値と実験値の比較を行っており、特に振動トルクに起因する磁気騒音の存在を明らかにしている。

第3章第3節では、シミュレーションによる分布力の波形と周波数が、スロットのオープニングによってどのように変化するかを述べ、シミュレーション結果に対する考察を与えている。特に2倍のすべり周波数で脈動する分布力は、すべての空間高調波が同時に寄与して発生するものであることを明らかにしている。

第3章第4節では、シミュレーションによる分布力の空間分布について述べ

ている。

特に、分布力の空間分布は、二次の磁界分布によって一方的に決定されることを明らかにしている。

以上、述べたごとく、本論文では、かご形誘導電動機設計の高精度化に対応した空間高調波に関する新しい理論を開発し、空間高調波による異状トルクの高精度な算定を可能とし、さらに磁気騒音に対する基本的な問題点を明らかにするとともに、その対策として、デジタルシミュレーションによる手法を提案している。

論文審査結果の要旨

特に創意性に重きを置いて提出論文の審査を行うと次の如くなる。

- (1) かご形誘導電動機のすべての空間高調波成分を行列に配列し、対称座標に変換して取扱い易くし、これを解いて電流およびトルクの式を明かにし、一次相数、二次スロット数および極数のあらゆる組合せを4個のケースに分類して扱うべきであることを示して理解をし易くした。その結果異常現象のクロリングの質と量を明かに表しうるようにした点に大いに創意性が認められる。
- (2) 多くの条件を考えに入れたギャップ中の分布力の式を電子計算機にかけて数値計算を行い、その結果を図示して従来数量的に明かにされていないものを特定の数値例についてであるが、一目瞭然たらしめ、理解を助けるようにしたことは労多とすべきである。
- (3) 二次電流の高調波成分を 2ω の因数で表わし、今日も時々問題となっている騒音の 2ω うなり音の発生解明の一助となる道を開いたことにも創意性が認められる。

以上今後要求されるかご形誘導電動機の精密設計に重要な理論的根拠を与えるものとして大いに有益性が認められる。

以上の諸点を総合して本審査小委員会は全会一致の意見をもって提出論文に対して工学博士の学位を授与するに価するという結論に達した。

昭和50年2月20日

論文審査委員 主査 教授 山 村 龍 男

講師 藤 田 伊 八 郎

教授 安 達 遂

教授 宮 下 一 雄



- ein Volltreffer



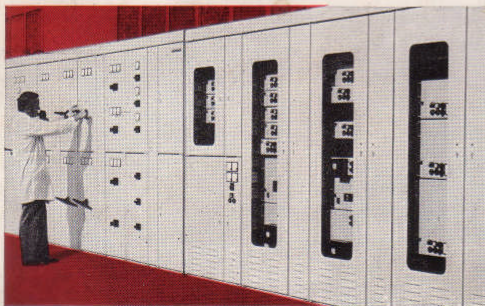
Niederspannungs-Schaltanlage ZZ2

600 mm Bautiefe (bis 3150 A)

660 V Betriebsspannung

6 ausziehbar

weitere Gründe, die für ZZ2 sprechen:



- Feste und ausziehbare Geräteeinheiten miteinander kombinierbar
- Stahlblechverkleidete Schaltzellen mit geschlossener Vorderfront durch Türen
- Bei Schutzabgängen von der Frontplatte aus einstellbare Relais
- Nachträglicher Aus- bzw. Umbau ohne Betriebsunterbrechung
- Kurze Austauschzeiten
- Kabelmontage vor dem Schaltfeld, gefahrloser Anschluß im Kabelanschlußraum

Niederspannungs-Schaltanlage ZZ2

CALOR-EMAG, D-4030 Ratingen, Telefon (0 21 02) 20 41, Telex 8-585123

N4/06

**CALOR
EMAG**

Elektrotechnische Zeitschrift Ausgabe A

Wissenschaftliche Zeitschrift
für Elektrische Energietechnik

Organ des Verbandes Deutscher Elektrotechniker (VDE)

ETZ-A

95. Jahrgang

Heft 10

ETZ-A Schriftleitung
605 Offenbach a. M.
Merianstr. 29
Tel. (0611) 83 06/380/381/378
Fernschreiber 04-152 678

Hauptschriftleiter:
Dr.-Ing. W. Fredebold

Schriftleiter:
Dipl.-Ing. K. Rangs
Dipl.-Ing. E. Wühle

Wissenschaftliche Berater:
Prof. Dr.-Ing. H. Böcker
Prof. Dr.-Ing. M. Depenbrock
Dr.-Ing. A. Grütz
Prof. Dr.-Ing. G. Hosemann
Dr.-Ing. P. Jacottet
Prof. Dr.-Ing. M. Thoma
Prof. Dr.-Ing. H. Weh

Verlag:
VDE-Verlag GmbH, 1 Berlin 12
Bismarckstraße 33
Telefon (030) 3 41 30 41
Fernschreiber (Telex) 01 81 683

Anzeigenleitung:
Folker U. Strobel

Druck:
H. Heenemann KG
1 Berlin 42, Bessemerstraße 83

Die ETZ-A erscheint monatlich

Preise für	Normal- bezug	VDE- Mitgl. nur durch den Verlag	Stu- denten
	DM	DM	DM
1/4jährlich (je Quartal)	36,—	23,—	17,—
1/2jährlich (1. 1.—30. 6./ 1. 7.—31. 12.)	66,—	40,—	28,—
jährlich (1. 1.—31. 12.)	127,—	75,—	52,—
Einzelheft	12,—	—	—
ETZ-A und etz-b zusammen	50,—	34,—	23,—
1/4jährlich	95,—	58,—	40,—
1/2jährlich	185,—	110,—	75,—

Alle Preise einschließlich 5,5 % Mehrwertsteuer
zuzüglich Porto.

Kündigung des Abonnements ist nur bis späte-
stens 4 Wochen vor Halbjahresschluß möglich.

Beilagenhinweis

Für den Raum Berlin liegt ein Prospekt der Firma
H. Maihak AG, 2 Hamburg 39, bei.

ETZ-A Bd. 95 (1974) H. 10

Summaries	38*—39*
Kurzfassungen	40*—41*
Résumés	42*—43*

NTG-Fachtagung Stand und zukünftige Entwicklung der Fernwirktechnik	483
--	-----

Aufsätze

K. Läge, D. Lambrecht Die Auswirkungen dreipoliger Netzkurzschlüsse mit Kurzschlußfortschaltung auf die mechanische Beanspruchung von Turbosätzen	508
--	-----

A.-W. Kron, G. Schröter Erwärmungsnachweis bei Asynchronmaschinen nach dem Unterspannungsverfahren	514
--	-----

G. Mainka Häufung erdverlegter Energiekabel	517
--	-----

W. Braun Aktive Lagerung rotierender Körper	520
--	-----

W. Brzezina, J. Langerholc Calculation of pole dimension corrections for the treatment of stray flux in electromagnetic suspension magnets	524
--	-----

Y. Saito The theory of the MMF harmonics waves of the m-n symmetrical machines	526
--	-----

Tagungsbericht

K. Geigenmüller, D. Oeding, Ph. K. Sattler, H. Zimmermann VDE-Fachtagung „Elektrische Maschinen und Antriebe in thermischen Kraftwerken“	531
--	-----

Informationen

Preise	540
Dissertation	541
Industrienotizen	542
Notizen aus Bonn	544
Buchbesprechungen	507, 519, 547
Veranstaltungen	548

37*

Y. Saito:

The theory of the MMF harmonic waves of the m, n -symmetrical machines (In english).

ETZ-A vol. 95 (1974) no. 10, p. 526–530; 3 fig., 2 tab., 4 bib.

This paper describes the new theory for the higher harmonics waves induced by the magnetomotive force distribution of the m -phase squirrel cage induction machines. The impedance matrix of the m -phase squirrel cage induction machines described by the m - n symmetrical machines is transformed into the symmetrical coordinates by the m - and n -phase symmetrical coordinate matrices and the transformed impedance matrices are classified into the four cases according to the relation of rotor bars or phase and pair of poles.

Y. Saito:

Zur Theorie von magnetischen Oberwellen in m, n -symmetrischen Maschinen (in English).

ETZ-A Bd. 95 (1974) H. 10, S. 526–530; 3 B., 2 Tab., 4 Qu.

Dieser Aufsatz beschreibt eine neue Theorie der Oberwellen, die durch die Verteilung der magnetomotorischen Kraft in Kurzschlußläufermotoren verursacht werden. Die für die m, n -symmetrischen Maschinen aufgestellte Impedanzmatrix eines Kurzschlußläufermotors wird durch m - und n -symmetrische Koordinatenmatrizen in die symmetrische Koordinate transformiert. Daraus werden in Abhängigkeit von der Läuferstellung bzw. der Phasenzahl und Polpaarzahl vier Fälle unterschieden.

Y. Saito:

La théorie des ondes harmoniques magnétiques dans des machines à symétrie (en anglais).

ETZ-A t. 95 (1974) no. 10, p. 526–530; 3 fig., 2 tab., 4 bib.

Dans cet article, l'auteur décrit une nouvelle théorie des ondes harmoniques qui sont provoquées par la distribution de la force magnétomotrice dans des moteurs à cage d'écureuil. La matrice d'impédance d'un moteur à cage établie pour les machines à symétrie m, n est transformée en coordonnées symétrique par les matrices de coordonnées à symétrie m et n . On distingue alors quatre case en fonction de la position du rotor ou du nombre de phases et du nombre de paires de pôles.

The Theory of the Harmonics of the m, n -Symmetrical-Machine

Yoshifuru Saito*)

Keywords: Harmonics, Induction machines

Abstracts: This paper describes the new theory of the higher harmonics due to the magnetomotive force (MMF) distribution of the m -phase squirrel cage induction machine. The analytic method of this paper is the tensor analysis, using the m - and n -phase symmetrical coordinate matrices. The mathematical model of this paper is described in the following way that the stator circuits have the m -phase symmetrical winding which is connected with the star connection, and the rotor circuits have the n -phase symmetrical winding which consists of the bars. The impedance matrix of this model is transformed into the symmetrical coordinate by the m - and n -phase symmetrical coordinate matrices and its results are classified into the four cases by the relation of the number of rotor bars or phases and the pair of poles.

1. Introduction

The study about the abnormal phenomena due to the space harmonics produced by the MMF distribution and the slot permeance variation of the machine's air gap are described by several other papers. Kron pointed out the slot combinations, using the permeance wave and the electromagnet noise due to the space harmonics. That very important problem is not yet solved perfectly in studies by Alger, Jordan and Erdelyi [1—4]. This paper is an attempt to clarify the new nature of the MMF harmonics of the m -phase squirrel cage induction machines which is the characteristic of the mutual action of the MMF space harmonics waves that plays the important role of the synchronous torque and the high frequency current of the stator circuit related with the number of the rotor bars and pair of poles.

2. Theory

2.1. Fundamental Impedance Matrix

The magnetic field due to the stepwise MMF distribution of the m -phase and $2p$ -pole stator circuit, is written in the following eq. (1)

$$H_1 = \sum_{\nu} H_1(\nu) \quad (1)$$

The magnetic field due to the saw wave MMF distribution of the n phases or bars of the rotor circuit (figure 1) is written in the following eq. (2)

$$H_2 = \sum_{\mu} H_2(\mu) \quad (2)$$

The kinetic energy term of Lagrange equation is calculated from eq. (1) and eq. (2) and Rayleigh's dissipative function can be written as the electrical resistance power loss in each coordinate. Therefore, the Euler-Lagrange equation is written:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = f_i(t) \quad (3)$$

The fundamental equation is derived by eq. (3) and the fundamental impedance matrix is written by the following eq. (4)

$$[Z] = \begin{bmatrix} [Z_{11}] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [Z_{22}] \end{bmatrix} \quad (4)$$

In eq. (4) $[Z_{11}]$, $[Z_{22}]$, $[M_{12}]$, $[M_{21}]$ are

$$[Z_{11}] = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu} L_{\nu} + l_1 \right) & \frac{d}{dt} \sum_{\nu} L_{\nu} \cos \frac{2\pi}{m} & \frac{d}{dt} \sum_{\nu} L_{\nu} \cos \frac{m-1}{m} 2\pi\nu \\ \frac{d}{dt} \sum_{\nu} L_{\nu} \cos \frac{2\pi}{m} & R_1 + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu} L_{\nu} + l_1 \right) & \frac{d}{dt} \sum_{\nu} L_{\nu} \cos \frac{m-2}{m} 2\pi\nu \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dt} \sum_{\nu} L_{\nu} \cos \frac{m-1}{m} 2\pi\nu & \frac{d}{dt} \sum_{\nu} L_{\nu} \cos \frac{m-2}{m} 2\pi\nu & R_1 + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\nu} L_{\nu} + l_1 \right) \end{bmatrix}$$

$$[Z_{22}] = \begin{bmatrix} R_2 + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\mu} L_{\mu} + l_2 \right) & \frac{d}{dt} \sum_{\mu} L_{\mu} \cos \frac{1}{n} 2\pi\mu & \frac{d}{dt} \sum_{\mu} L_{\mu} \cos \frac{n-1}{n} 2\pi\mu \\ \frac{d}{dt} \sum_{\mu} L_{\mu} \cos \frac{1}{n} 2\pi\mu & R_2 + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\mu} L_{\mu} + l_2 \right) & \frac{d}{dt} \sum_{\mu} L_{\mu} \cos \frac{n-2}{n} 2\pi\mu \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d}{dt} \sum_{\mu} L_{\mu} \cos \frac{n-1}{n} 2\pi\mu & \frac{d}{dt} \sum_{\mu} L_{\mu} \cos \frac{n-2}{n} 2\pi\mu & R_2 + \frac{d}{dt} \left(\sum_{\mu} L_{\mu} + l_2 \right) \end{bmatrix}$$

$$[M_{12}] = [M_{21}]^T =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{\nu} M_{\nu\mu} \begin{bmatrix} \cos \nu\theta & \cos \nu(\theta + (1/n) 2\pi p) & \dots & \cos \nu(\theta + (n-1/n) 2\pi p) \\ \cos \nu(\theta - (1/m) 2\pi) & \cos \nu(\theta - (2\pi/m) + (1/n) 2\pi p) & \dots & \cos \nu(\theta - (2\pi/m) + (n-1/n) 2\pi p) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \nu(\theta - (m-1/m) 2\pi) & \cos \nu(\theta - (m-1/m) 2\pi + (1/n) 2\pi p) & \dots & \cos \nu(\theta - (m-1/m) 2\pi + (n-1/n) 2\pi p) \end{bmatrix}$$

*) Y. Saito is with College of Engineering, Hosei University, Japan.

2.2. Coordinate Transformation

The coordinate transformation is done by the m -phase and the n -phase symmetrical coordinate matrix, respectively. The stator and the rotor impedance matrix and the mutual inductance matrix are transformed by the m -phase and the n -phase symmetrical coordinate matrix.

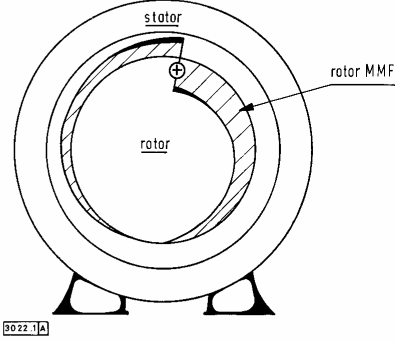


Figure 1. Rotor MMF distribution of the one bar.

The following relations between the space harmonics produced by the stator or rotor MMF distribution, and the m -phase or n -phase symmetrical coordinate matrix operator are established.

$$\alpha^\nu = \alpha^{2m h \pm 1} = \alpha^{\pm 1} \quad (5)$$

$$\beta^\mu = \beta^{\nu n \pm \gamma} = \beta^{\pm \nu} \quad (6)$$

The coordinate transformation is carried out by the following equation, using eq. (5) and (6):

$$[\mathbf{Z}'] = \begin{bmatrix} [\mathbf{m}] [\mathbf{Z}_{11}] [\mathbf{m}]^{-1} & [\mathbf{m}] [\mathbf{M}_{12}] [\mathbf{n}]^{-1} \\ [\mathbf{n}] [\mathbf{M}_{21}] [\mathbf{m}]^{-1} & [\mathbf{n}] [\mathbf{Z}_{22}] [\mathbf{n}]^{-1} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

The term $[\mathbf{Z}'_{11}] = [\mathbf{m}] [\mathbf{Z}_{11}] [\mathbf{m}]^{-1}$ consists of the elements (2.2) and (m, m)

$$z_{22} = z_{m, m} = R_1 + \frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \sum_{\nu} L_{\nu} + l_1 \right]. \quad (7a)$$

The other elements on the diagonal line of the matrix $[\mathbf{Z}']$ are

$$R_1 + \frac{d}{dt} l_1 \quad (7b)$$

that are zero phase impedance of the stator circuit. All the other elements of the matrix $[\mathbf{Z}'_{11}]$ are zero.

$$[\mathbf{Z}'] = \begin{bmatrix} z_{22} & 0 \\ 0 & z_{22} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ \mp j(g n + \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ \pm j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ \mp j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ \pm j(g n + \gamma) (\theta/p) \} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ \pm j(g n + \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ \pm j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ \mp j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ \mp j(g n + \gamma) (\theta/p) \} \end{array} \right] \quad (8)$$

$$\begin{array}{cc} z_{\gamma+1, \gamma+1} & 0 \\ 0 & z_{\gamma+1, \gamma+1} \end{array}$$

$$[\mathbf{Z}'] = \begin{bmatrix} z_{22} & 0 \\ 0 & z_{22} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ -j(g n + \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ +j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ -j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ +j(g n + \gamma) (\theta/p) \} \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ +j(g n + \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ +j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ -j(1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{gn+\gamma} \exp \{ -j(g n + \gamma) (\theta/p) \} \end{array} \right] \quad (9)$$

$$\begin{array}{cc} z_{\gamma+1, \gamma+1} & 0 \\ 0 & z_{\gamma+1, \gamma+1} \end{array}$$

The term $[Z'_{22}] = [n] [Z_{22}] [n]^{-1}$ consists of the elements (1.1)

$$z_{11} = R_2 + \frac{d}{dt} \left(\sum_g L_{gn} + l_2 \right) \quad (7c)$$

that are zero phase impedance of the rotor circuit and the elements $(\gamma + 1, \gamma + 1)$ and $(n - \gamma + 1, n - \gamma + 1)$ of the matrix $[Z'_{22}]$, which are

$$z_{\gamma+1, \gamma+1} = R_2 + \frac{d}{dt} \left(\sum_g L_{g\gamma+1} + l_2 \right). \quad (7d)$$

All the other elements of the matrix $[Z'_{22}]$ are zero. The term $[M'_{12}] = [m] [M_{12}] [n]^{-1}$ consists of the element $(\delta, 1)$ of the matrix $[M'_{12}]$

$$\frac{\sqrt{m n}}{2} \sum_g M_{gn} \exp \left(\pm j \frac{g n \theta}{p} \right) \quad (7e)$$

that are the zero phase mutual inductances of the space harmonics of the rotor circuit. The elements $(2, \gamma + 1)$ of the matrix $[M'_{12}]$ are

$$\frac{\sqrt{m n}}{2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \left\{ \pm j (g n + \gamma) \frac{\theta}{p} \right\}. \quad (7f)$$

Their conjugate quantities are in the position $(m, n + 1 - \gamma)$ of the matrix $[M'_{12}]$.

The term $[M'_{21}] = [n] [M_{21}] [m]^{-1}$ is derived from $[M'_{21}] = [M_{12}]^*{}^T$.

The transformed mutual inductance matrix $[M'_{12}]$ or $[M'_{21}]$ is classified into the four cases by the relation of the number of rotor phases and pole pairs. Each case of the transformed impedance matrix $[Z']$ is expressed by the following equations without zero phase components of the stator and rotor circuit.

1. If $n(1 + g + g')$ is equal to $2 p m (h + k')$, the mutual inductances for the harmonics of order $p(2 m h \pm 1)$ and $p(2 m h' \mp 1)$ are in the same column in matrix $[M'_{12}]$. For this case the transformed impedance matrix $[Z']$ is given in eq. (8).

2. If $n(1 + g + g')$ is equal to $2 p (m(h + k') + 1)$, the mutual inductances for the harmonics of order $p(2 m h + 1)$ and $p(2 m h' + 1)$ are in the same column in the matrix $[M'_{12}]$. For this case the transformed impedance matrix $[Z']$ is given in eq. (9).

3. If $n(1 + g + g')$ is equal to $2 p (m(h + k') - 1)$, the mutual inductances for the harmonics of order $p(2 m h - 1)$ and $p(2 m h' - 1)$ are in the same column in the matrix $[M'_{12}]$. For this case the transformed impedance matrix $[Z']$ is given in eq. (10).

4. If $n(1 + g + g')$ is not equal to $2 p (m(h + k') \pm (\delta))$, each harmonics mutual inductance exists independently in the matrix $[M'_{12}]$. For this case the transformed impedance matrix $[Z']$ is given in eq. (11).

$$[Z'] = \begin{bmatrix} z_{22} & 0 \\ 0 & z_{22} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ + j (g n + \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ - j (1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ + j (1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ - j (g n + \gamma) (\theta/p) \} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ - j (g n + \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ - j (1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_{g'} M_{1 \mp g' n - \gamma} \exp \{ + j (1 \mp g' n - \gamma) (\theta/p) \} & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ + j (g n + \gamma) (\theta/p) \} \\ z_{\gamma+1, \gamma+1} & 0 \\ 0 & z_{\gamma+1, \gamma+1} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[Z'] = \begin{bmatrix} z_{22} & 0 & \cdot \\ 0 & z_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ - j (g n + \gamma) (\theta/p) \} & 0 & \cdot \\ 0 & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ + j (g n + \gamma) (\theta/p) \} & \cdot \\ \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ j (g n + \gamma) (\theta/p) \} & 0 & \cdot \\ 0 & \frac{d}{dt} (m n)^{1/2/2} \sum_g M_{g\gamma+1} \exp \{ - j (g n + \gamma) (h/p) \} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{\gamma+1, \gamma+1} & 0 & \cdot \\ 0 & z_{\gamma+1, \gamma+1} & \cdot \end{bmatrix} \quad (11)$$

2.3. Current and Torque

If the stator impressed m -phase voltage is perfectly balanced, the transformed voltage matrix by the m -phase symmetrical coordinate matrix consists of the second row element $U' \exp(j\omega t)$ and its conjugate value of the m -th row. The currents are calculated by the iteration method and the example of the current matrix derived from the first iterative approximation of the case (2) is written by eq. (12)

The torque is calculated from eq. (13)

$$\mathbf{T} = \frac{p}{4} \left\{ [\mathbf{I}^*]^T \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} [\mathbf{Z}] \right\rangle [\mathbf{I}] \right\} \quad (13)$$

and the example of the torque calculation, using eq. (9) and (12), results in the following eq. (14–19):

$$\mathbf{T}_1 = \sum_g \mathbf{j} (g n + \gamma) \frac{\sqrt{m n}}{4} M_{g n + \gamma} i_1^* i_{g n + \gamma} \quad (14)$$

$$\mathbf{T}_1^* = \sum_{g'} \mathbf{j} (1 \mp g' n - \gamma) \frac{\sqrt{m n}}{4} M_{1 \mp g' n - \gamma} (i_1^* i_{1 \mp g' n - \gamma}) \quad (15)$$

$$\mathbf{T}_2 = \sum_g \sum_{g'} \mathbf{j} (g n + \gamma) \frac{\sqrt{m n}}{4} M_{g n + \gamma} i_1^* i_{1 \mp g' n - \gamma}^* \quad (16)$$

$$\mathbf{T}_2^* = \sum_g \sum_{g'} \mathbf{j} (1 \mp g' n - \gamma) \frac{\sqrt{m n}}{4} M_{1 \mp g' n - \gamma} i_1^* i_{g n + \gamma}^* \quad (17)$$

$$\mathbf{T}_3 = \sum_g \sum_{g'} \mathbf{j} (g n + \gamma) \frac{\sqrt{m n}}{4} M_{g n + \gamma} (i_1^* i_{1 \mp g' n - \gamma}^* - i_1^* i_{g n + \gamma}^*) \exp \{-j 2 \omega t + \mathbf{j} (1 + g + g') (n \theta / p)\} \quad (18)$$

$$\mathbf{T}_3^* = \sum_{g'} \sum_g \mathbf{j} (1 \mp g' n - \gamma) \frac{\sqrt{m n}}{4} M_{1 \mp g' n - \gamma} (i_1^* i_{1 \mp g' n - \gamma} - i_1 i_{g n + \gamma}) \exp \{\mathbf{j} 2 \omega t - \mathbf{j} (1 + g + g') (n \theta / p)\} \quad (19)$$

and the total torque is written by $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_1^* + \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2^* + \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_3^*$.

The examination of the current matrix eq. (12) gives the following relations, that the rotor circuit currents consists of the term due to the mutual inductance for the harmonic of order $g n + \gamma$ and the term due to the mutual inductance for the harmonic of order $(1 + g') n - \gamma$. The stator circuit currents consists of the stator impressed frequency term and the high frequency term due to the mutual action between the harmonics of order $(g n + \gamma)$ and $[(1 + g') n - \gamma]$.

The examination of the torque terms results in the following relations that the eq. (14) and (15) are the asynchronous torques produced by the stator impressed frequency current and the rotor harmonic currents; eq. (16) and (17) are the asynchronous torques produced by the stator high frequency currents and the rotor harmonic currents. Eq. (18) and (19) are the synchronous torques effected at a particular slip $s = 1 - 2 p/n [1 + g + g']$ that consist of the term due to the stator impressed frequency current and the rotor harmonic currents and the term due to the stator high frequency currents and the rotor harmonic currents.

The current matrix and the torques of the other case are calculated in the same way as the previous example and its results are described as follows: the current matrix of case (1) consists of the several different stator rotor harmonic currents; in this case torques include the locking torques.

The current matrix of case (3) has the same form as in case (2), but the stator harmonic currents are of a different order from those in case (2). Therefore, there torques include the synchronous torque in the braking region.

The current matrix of the case (4) consists of the stator impressed frequency current and the rotor harmonic currents. The torques in this case consist only of asynchronous torques.

2.4. Commutation Matrix

If the harmonics' mutual inductances in the same column and same row in the transformed mutual inductance matrix exist independently, the commutation matrix can be established except the case (1), and the example of the commutation matrix for

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} i_1 \exp(j\omega t + \sum_g i_1^* \exp\{-j\omega t + \mathbf{j} (1 + g + g') (n \theta / p)\}) \\ i_1^* \exp(-j\omega t) + \sum_{g'} i_1' \exp\{\mathbf{j} \omega t - \mathbf{j} (1 + g + g') (n \theta / p)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_{g n + \gamma} \exp\{\mathbf{j} \omega t - \mathbf{j} (g n + \gamma) (\theta / p)\} + \sum_{g'} i_{1 \mp g' n - \gamma}^* \exp\{-j\omega t + \mathbf{j} (1 \mp g' n - \gamma) (\theta / p)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_g i_{g n + \gamma}^* \exp\{-j\omega t + \mathbf{j} (g n + \gamma) (\theta / p)\} + \sum_{g'} i_{1 \mp g' n - \gamma} \exp\{\mathbf{j} \omega t - \mathbf{j} (1 \mp g' n - \gamma) (\theta / p)\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 1 \\ \sum_g \sum_{g'} \exp\{\mathbf{j} (1 + g + g') (n \theta / p)\} \\ \sum_g \exp\{\mathbf{j} (g n + \gamma) (\theta / p)\} \\ \sum_{g'} \exp\{(1 \mp g' n - \gamma) (\theta / p)\} \end{bmatrix} \quad (20)$$

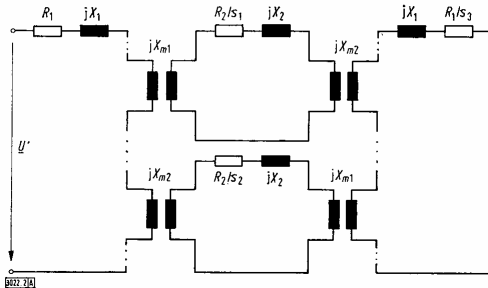


Figure 2. Steady state equivalent circuit of case (2).

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \omega \{(m/2) \sum L_\nu + l_1\}; & X_2 &= \omega \{(n/2) \sum L_{gn,\gamma} + l_2\}; \\
 X_{m1} &= \omega (m n)^{1/2} / 2 \{M_{gn,\gamma}\}; & X_{m2} &= \omega (m n)^{1/2} / 2 \{M_{1\pm g/n,\gamma}\}; \\
 s_1 &= \omega - (g n + \gamma) [(1-s) \omega] / p / \omega; & s_2 &= \omega - (1 + g' n - \gamma) (1-s) \omega / p / \omega \\
 s_3 &= \omega - (1 + g' n) (n/p) (1-s) \omega / \omega;
 \end{aligned}$$

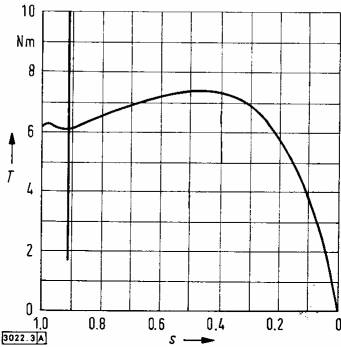


Figure 3. Torque-slip curve of case (2).

case (2) is shown in eq. (20). The result of the commutation of the eq. (9), using eq. (20) gives the equivalent circuit for the stator transformed voltage $U' \exp(j\omega t)$, which is shown in figure 2. The numerical example of the torque-slip curve calculated by the equivalent circuit of figure 2 is shown in figure 3. Its circuit constants are given in table 2.

3. Conclusion

As shown above, I have tried to elucidate the new nature of the MMF space harmonics of the m -phase squirrel cage induction machines modeled by the m, n -symmetrical machines.

The particular pair of the space harmonics has the mutual action in the particular sets of the number of pole pairs and the rotor phase or bars. Therefore, the particular pair of the space harmonics must be calculated simultaneously for the rigorous calculation of the phenomena due to the MMF space harmonics of the m -phase squirrel cage induction machines.

Table 1. List of Symbols and notations.

$H_1(\nu)$	magnetic field due to the stator MMF
$H_2(\mu)$	magnetic field due to the rotor MMF
L	kinetic energy term of the Lagrange function, in this case magnetic field energy
F	Rayleigh dissipative function, in this case electrical resistance power loss
$f_i(t)$	i -th coordinate external forced function, in this case stator impressed voltage
x_i	variable of the i -th coordinate, in this case electrical charge
$[Z]$	total impedance matrix
$[Z_{11}]$	stator impedance matrix
$[Z_{22}]$	rotor impedance matrix
$[M_{12}], [M_{21}]$	mutual inductance matrix
R_1, R_2	stator and rotor circuit resistance respectively
L_ν, L_μ	self-inductance of the ν -th and μ -th harmonic respectively
l_1, l_2	leakage inductance of the stator and rotor circuit respectively
$M_{p\nu}$	mutual inductance of the ν -th harmonic between the stator and rotor circuit
$[A^*]$	conjugate of matrix $[A]$
$[A]$	transformed of matrix $[A]$ in the symmetrical coordinate
\dot{x}	denotes the differential of x respective to time
m	number of the stator phase
n	number of the rotor phase
p	number of the pair of poles
g, g', h, h'	positive integer including zero
$\nu = 2m \pm 1$	order of the stator MMF harmonics
μ	order of the rotor MMF harmonics, in this case positive integer
γ	order of the MMF harmonics smaller than " n "
s	slip
ω	stator impressed source frequency
θ	$(1-s)\omega t$, angle between the stator and rotor circuit transformed into the electrical angle
α	$j 2\pi/m$, element of the m -phase symmetrical coordinate matrix
β	$j 2\pi/n$, element of the n -phase symmetrical coordinate matrix
$[m], [n]$	m - and n -phase symmetrical coordinate matrix respectively
$[A]^T$	transpose of matrix $[A]$
$[A]^{-1}$	inverse of matrix $[A]$
δ	2 or m

Table 2. Circuit constants of calculated motor.

Number of phases	stator	$m = 3$
	rotor	$n = 40$
Number of poles		$p = 4$
Voltage (transformed value)		$U' = 200 \text{ V}$
Harmonics' order ($g = g' = 0$)		$g n + \gamma = p$
		$(1 + g') n - \gamma = 19 p$
Resistance (constant value assumed)		$R_1 = R_2 = 5 \Omega$
Mutual reactance	p -th harmonic	$X_{m1} = 95 \Omega$
	19 p -th harmonic	$X_{m2} = 95 / (19 \times 19) \Omega$
Total reactance (leakage reactance included)		$X_1 = X_2 = 100 \Omega$

4. References

- [1] G. Kron: Induction Motor Slot Combinations. AIEE Transactions, vol. 50 (1931) p. 757-68.
- [2] P. L. Alger: The nature of polyphase induction machines. John Wiley & Sons, New York.
- [3] H. Jordan: Approximate calculation of the noise produced by squirrel-cage motors. The Engineers' digest, vol. 10 (1949) p. 222.
- [4] E. Erdelyi: Predetermination of sound pressure levels of magnetic noise of polyphase induction motors. AIEE Transactions, vol. 74 (1955) p. 1269-80.