

# 基礎電磁気学

**Elementary Electromagnetism for Undergraduate Students**

第 2 版 Version 2.1

法政大学

理工学部 電気電子工学科

齋藤 兆古

2007 年 11 月 29 日・2008 年 1 月 7 日

2011 年 3 月 11 日 太田修二 校正

2014/01/18, 2012/4/19, 2012/5/30, 2012/6/3, 2012/7/12 校正

## もくじ

まえがき	2
第 1 章 数学的基礎 1 (微積分) (16)	4
第 2 章 電荷、クーロン力、電界(17)	19
第 3 章 電位・電位差(13)	40
第 4 章 電気力線、誘電体、キャパシタンス(17)	55
第 5 章 電流、変位電流、電界エネルギー(11)	72
第 6 章 磁界、アンペアの法則(15)	83
第 7 章 電磁誘導、磁性体、インダクタンス(22)	98
第 8 章 数学的基礎 2 (ベクトル微積分) (10)	118
第 9 章 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル(15)	127
第 10 章 電磁波(9)	142

## まえがき

電磁気学は人類誕生以来いろいろなところで起こる電気・磁気現象を集大成した学問分野である。多くの工学と同じく起源は物理学にある。物理学とは物の理屈を考える分野である。人類の関知するいろいろな自然界の現象の因果関係を説明する学術が物理である。若い頃、物理学者へ原子核の周辺へ電子が軌道運動をしているのは何故かを質問した。エネルギー最小法則から考えれば電子が軌道運動するよりも静止していた方がエネルギーは少なく済むから、どうして静止してないのか？なる素朴な疑問を抱いたからである。物理学者曰く、原子核の周辺を電子が軌道運動していると考えれば種々の現象の合理的な説明がつくからである。物理学とはそれ自身が一意的では無く、他により合理的に各種の物理現象の説明がつけられるならば新しい物理学の誕生となるであろう。こんなコメントを頂いた。恐らく高校時代に学んだ物理を絶対的に正しいと考えて学んだであろう。しかし、最前線の物理はかなり観点が異なることも理解できるであろう。

2008 年度から改組された理工学部電気電子工学科で基礎電磁気学と演習を担当することとなった。2004 年まで旧工学部情報電気電子工学科で電磁気学Ⅱの講義を通年で担当していた。電磁気学は電気電子工学の原点となる基幹科目であるから、普通は電磁気学Ⅲ位までであるが、我が大学では電磁気学ⅠとⅡの2年間で終わりであった。2008 年度から開講される新電気電子工学科では基礎電磁気学（半期）、電磁気学（半期）、応用電磁気学(半期)で結果としては1年半の短縮となった。

どんな学問であれ、新しい概念や学術分野を開拓する場合必ず基幹となる学術から分岐する。これは、大きな木の枝ほど幹から直接派生しているのと同じであり、枝の末端部で分かれた枝は大きく育たないのと同じである。この意味で、本学の電気電子工学科は応用分野を得意とする存在であることがわかる。

他大学と比較して電磁気学の講義時間は少ないが、これが実際問題として学生の学力に影響しているかと言えば意外に無関係である。言い換えれば我が大学の学生の電磁気学の学力が他大学と比較して決して劣らないと言える。絶対的に費やした時間数は少ないのに学力がさほど変わらないのは何故か？結論から言えば、高校入試や大学入試問題のように問題解法の技巧を学んでも学力とならず、単純に問題を解く技巧を習得しただけでは電磁気学そのものを理解したわけでは無いことがわかった。簡単に言えば、問題解法の技術を学ぶのは時間の無駄である。実際の現場で遭遇する問題を解く場合、ほぼ 100%既存の答えがわかっている練習問題解法の技巧は無効であり、電磁気学で遭遇する個々の事象や問題の物理的意味の理解と概念把握が遙かに有意義である。筆者は電磁界解析関連の論文(<http://www.ysaitoh.k.hosei.ac.jp/labor/ysaitoh/past.htm>)を相当数書いているが、100%学部時代に学んだ電磁気学の練習問題解法技巧は無効であった。逆に電磁界解析の研究をする場合、電磁現象の物理的意味や物理的メカニズムのイマジネーション、すなわち、電磁現象の概念把握が極めて有効であった。

こんなことから、本稿は、山梨大学名誉教授 伊藤 洋先生が Web 上で公開されておられる講義ノート(<http://www.ees.yamanashi.ac.jp/~ito/lecture/denkigaku/denki00.htm>)に基づいて作成した。伊藤先生の講義ノートはわかりやすいが理学部系の電磁気学であるため、少し工学系の部分を補完して本テキストが作成した。練習問題の多くは和歌山大学の似内映之先生のサイトで公開されている練習問題(<http://www.wakayama-u.ac.jp/~nitani/pbe/2006/index.html>)を使わせて頂きました。伊藤先生と似内先生には紙面を借りてあつくお礼を申し上げます。

とは言え、基礎知識を前提としないで学べるテキスト作成を試みたが、なかなか難しく、系統的な内容と言うよりも大まかな重要事項に関して纏める形となった。また、定義や内容も意図的な重複となった。なんと言っても学問は反復だと少し開き直った第 1Version となった。

二〇〇八年一月七日(月) 斎藤兆古

## 第 1 章 数学的基礎 1 (微積分、Calculus)

### 1. 1 微分

#### 1. 1. 1 定義

微分とは何だろう？この問いに対し、微少部分の変化率とも言える。もっと荒っぽく言えば割り算である。たとえば、距離を時間で割ると速度である。このような演算を微少部分で考えると微分演算となる。

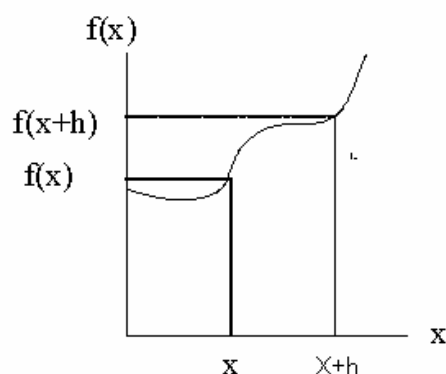


図 1.1 微分の定義

ある任意の関数  $f(x)$  の  $x$  に関する微分は極値演算で定義される。物理的なイメージは図 1.1 の様に関数  $f(x)$  が  $x$  に対して変化するとした場合、 $x$  が  $x$  から  $x+h$  へ変化する場合、 $f(x)$  から  $f(x+h)$  に関数値が変化する場合、 $h \rightarrow 0$  になった場合の極値である。要するに無限に小さい区間における関数の変化率が微分である。図 1.1 で考えれば傾きである。

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

#### 例題

$$f(x) = x, \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$$f(x) = x^2, \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

.....

$$f(x) = x^n, \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

## 1. 1. 2 自然対数

$$f(x) = \log(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h}$$

$$\text{変数変換} : k = \frac{h}{x}, \quad h = xk, \quad h \rightarrow 0, \quad k \rightarrow 0, \quad x : \text{const}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} &= \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \frac{\log(x+xk) - \log(x)}{xk} \right] \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \left[ \frac{\log \frac{x+xk}{x}}{k} \right] = \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \log(1+k) = \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \log(1+k)^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = 2.71828459 \dots \quad \text{自然数}$$

$$\therefore \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \log_e (1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{x} \quad \text{or} \quad \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$$

$x$  の自然対数

$$\log_e x$$

指数関数

$$y = e^x$$

$$x = \log_e y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = y = e^x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

例題

$$(a) \frac{d}{dx} e^{-x} \text{を計算しなさい。}$$

$$y = e^{-x}, \log y = -x, -\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dx} e^{-x} = -e^{-x}$$

$$(b) \frac{d}{dx} e^{-ax} \text{を計算しなさい。}$$

$$y = e^{-ax}, \log y = -ax, -a \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d}{dx} e^{-ax} = -ae^{-ax}$$

(c)  $\frac{d}{dx}(ax[bx+c])$  を計算しなさい。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(ax[bx+c]) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)[b(x+h)+c] - ax[bx+c]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ab(x+h)^2 + ac(x+h) - ax[bx+c]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ab(x^2 + 2xh + h^2) + ac(x+h) - ax[bx+c]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{2abxh + abh^2 + ach}{h} \right] = 2abx + ac = a[bx+c] + axb \\ &= \left[ \frac{d}{dx}(ax) \right] [bx+c] + ax \left[ \frac{d}{dx}[bx+c] \right] \\ \therefore \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] &= \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}\end{aligned}$$

(d)  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}$  を示しなさい。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}\end{aligned}$$

**例題**  $\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\left( \frac{d}{dx} \sin x \right) \cos x - \sin x \left( \frac{d}{dx} \cos x \right)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

(e) もし  $y=f(z)$  と  $z=g(x)$  が微分可能であれば、 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx}$  を示す。

**例題**  $f(x) = (a+bx)^2$  を考える。

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a+b(x+h)]^2 - (a+bx)^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2abx + 2abh + b^2(x^2 + 2xh + h^2) - a^2 - 2abx - b^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2abh + 2xbh^2 + b^2h^2}{h} = 2ab + 2xb^2 + \lim_{h \rightarrow 0} bh = 2(a+bx)b\end{aligned}$$

もし  $z = a + bx$  とすれば、 $f(x) = (a + bx)^2 = g(z) = z^2$  であるから、

$$\frac{dg(z)}{dz} = 2z = 2(a + bx) \quad \text{であり、} \quad \frac{dz}{dx} = b \quad \text{である。}$$

$$\text{よって、} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(z)}{dz} \frac{dz}{dx} = 2(a + bx)b \quad \text{が成り立つ。}$$

$$\boxed{\text{他の例}} \quad \frac{d}{dx} (x^2 + 3x - 2)^7, \quad z = x^2 + 3x - 2, \quad y = z^7$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = 7z^6 (2x + 3) = 7(x^2 + 3x - 2)^6 (2x + 3)$$

### $\boxed{\text{テイラー級数}}$

ここでは微分、すなわち、微少部分の変化率を利用して、関数  $f(x + \Delta x)$  を  $f(x)$  近傍で級数展開して表現することを考える。まず、簡単な例題として、 $f(x) = ax^2 + bx + c$  なる関数を考える。 $x$  が  $x + \Delta x$  のとき、この関数は次式のように展開できる。

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c = ax^2 + bx + c + \Delta x(2ax + b) + a\Delta x^2$$

次に、 $f(x)$  の  $x$  に関する微分を考える。

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [ax^2 + bx + c] = 2ax + b$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \frac{d^2}{dx^2} [ax^2 + bx + c] = \frac{d}{dx} [2ax + b] = 2a$$

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = \frac{d^3}{dx^3} [ax^2 + bx + c] = \frac{d^2}{dx^2} [2ax + b] = \frac{d}{dx} [b] = 0$$

$f(x + \Delta x)$  の展開式と  $f(x)$  の  $x$  に関する微分項を比較すると、

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \Delta x(2ax + b) = \Delta x \frac{df(x)}{dx} = \Delta x \frac{d}{dx} [ax^2 + bx + c] = \Delta x(2ax + b)$$

$$a\Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} (ax^2 + bx + c) = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d}{dx} (2ax + b) = a\Delta x^2$$

であるから、

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c = ax^2 + bx + c + \Delta x(2ax + b) + a\Delta x^2$$

$$= ax^2 + bx + c + \frac{\Delta x}{1!} \left[ \frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) \right] + \frac{\Delta x^2}{2!} \left[ \frac{d^2}{dx^2} (ax^2 + bx + c) \right]$$

が成り立つ。

$f(x) = ax^2 + bx + c$  なる関数では 2 階までの微分しか可能でないから次式が成り立った。

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \Delta x(2ax + b) = \frac{df(x)}{dx} = \Delta x \frac{d}{dx} [ax^2 + bx + c] = \Delta x(2ax + b)$$

$$a\Delta x^2 = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} (ax^2 + bx + c) = \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d}{dx} (2ax + b)$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c = ax^2 + bx + c + \Delta x(2ax + b) + a\Delta x^2 \\ &= ax^2 + bx + c + \frac{\Delta x}{1!} \left[ \frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) \right] + \frac{\Delta x^2}{2!} \left[ \frac{d^2}{dx^2} (ax^2 + bx + c) \right] \end{aligned}$$

しかし、 $f(x)$ が  $n$  回まで微分可能であれば、残りの項がある。

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{h^i}{i!} \left[ \frac{d^i}{dx^i} f(x) \right]_{x=a} + R_{n+1}$$

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left[ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) \right]_{x=\zeta} \quad a \leq \zeta \leq a+h$$

これがテイラー級数展開(Taylor series expansion)であり、計算機を使った工学のみならず、大部分の理工学で最も重要で根幹となる数学的方法である。

## 1. 2 積分

積分とは何だろう？連続な関数、例えば  $x$  を不連続な値 1 へ変換する演算が微分演算なら、不連続な値 1 を連続な関数  $x$  へ変換するのが積分と言っても正しい。

しかし、不連続な値 1 をどの点からどの点まで積分するか条件が必要であり、定数 1 を単純に積分して  $x$  とは言えず、 $x+c$  と書かねばならない。 $c$  は積分定数と呼ばれ、積分する範囲を決めてないから生ずる定数である。逆に定数  $c$  の微分はゼロとなることから理解できるであろう。このように積分範囲を決めない積分を不定積分(Indefinite Integral)と呼ぶ。他方、定数 1 をゼロから  $x$  までの積分範囲で積分すると元の関数  $x$  が得られ  $c$  は付かない。これは積分範囲が決められているからであり、これを定積分(Definite Integral)と呼ぶ。

以上の積分の考え方を一般化すれば、定数である点を並べて線を生成する演算、線を並べて面を生成する演算、面を並べて体積を生成する演算と考えても良い。この考え方は計算機スクリーンへ絵を描く作業であるコンピュータグラフィックス研究の中で、点の集合が線、線の集合が面、面の集合が立体と考えるホモトピー(Homotopy)幾何学の考え方と同じであるが、ホモトピーは立体までであるが、積分では立体を並べて超空間的な抽象化が可能である。

### 1. 2. 1 積分の定義

もし、私たちが  $x$  に関して関数  $g(x)$  を積分すれば、

$$\int g(x) dx = f(x)$$

そのとき、我々は以下の関係を得る。

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)$$

これにより、 $f(x)$ は  $g(x)$ の積分である。

### 1. 2. 2 不定積分と定積分

$c$  を定数として、 $x^2$  と  $x^2+c$  は何れも、 $2x$  の積分である。理由は、 $(d/dx)x^2=2x$  と  $(d/dx)(x^2+c)=2x$  なる点にある。前者の  $x^2$  と後者の  $x^2+c$  はそれぞれ定積分と不定積分と呼ばれる。

### 1. 2. 3 リーマン ( Riemann ) 積分の概念

台形の面積  $S$  を求めよう。

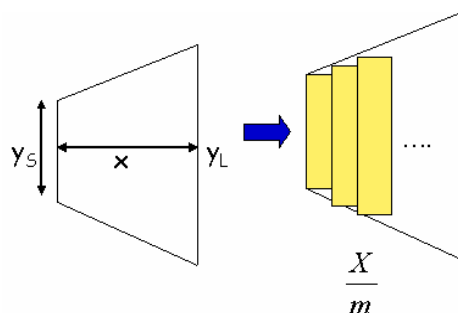


図 1.2 台形の面積  $S$

$$\begin{aligned} S &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left( Y_s + \frac{i}{m} \frac{Y_L - Y_s}{X} \right) \frac{X}{m} = \int_0^X \left( Y_s + \frac{Y_L - Y_s}{X} x \right) dx \\ &= \int_0^X \left( Y_s + \frac{Y_L - Y_s}{X} x \right) dx = \left[ Y_s x + \frac{x^2}{2} \left( \frac{Y_L - Y_s}{X} \right) \right]_0^X = \frac{X}{2} (Y_s + Y_L) \end{aligned}$$

台形平面体の体積  $V$  を求めよう。

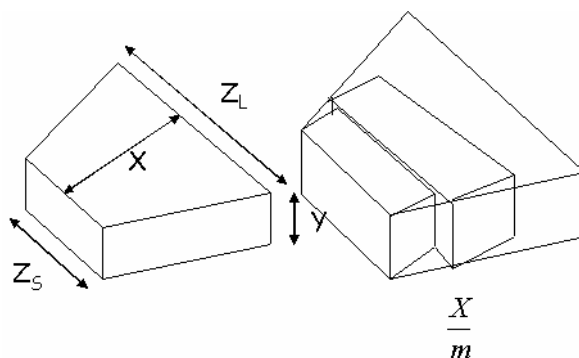


図 1.3 台形平面体の体積  $V$

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left( Z_s + \frac{i}{m} \frac{Z_L - Z_s}{X} \right) Y \frac{X}{m} = \int_0^X \left( Z_s + \frac{Z_L - Z_s}{X} x \right) Y dx \\
 &= \left[ \left( Z_s x + \frac{Z_L - Z_s}{X} \frac{x^2}{2} \right) Y \right]_0^X = XYZ_s + \frac{1}{2} (Z_L - Z_s) XY = \frac{1}{2} XY (Z_L + Z_s)
 \end{aligned}$$

台形平面体の体積  $V$  を求めよう。

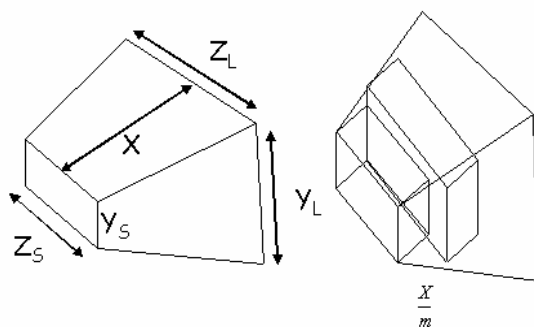


図 1.4 台形平面体の体積  $V$

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left( Y_s Z_s + \frac{i}{m} \frac{Y_L - Y_s}{X} \frac{i}{m} \frac{Z_L - Z_s}{X} \right) \frac{X}{m} = \int_0^X \left( Y_s Z_s + \frac{Y_L - Y_s}{X} \frac{Z_L - Z_s}{X} x^2 \right) dx \\
 &= \left[ \left( Y_s Z_s x + \frac{Y_L - Y_s}{X} \frac{Z_L - Z_s}{X} \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^X = XY_s Z_s + \frac{1}{3} (Y_L - Y_s) (Z_L - Z_s) X \\
 &= X \left[ Y_s Z_s + \frac{1}{3} (Y_L - Y_s) (Z_L - Z_s) \right]
 \end{aligned}$$

#### 1. 2. 4 積分技法

通常の積分： $\int f(x) dx = F(x) + c$

部分積分： $\int \frac{df(x)}{dx} g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) \frac{dg(x)}{dx} dx$

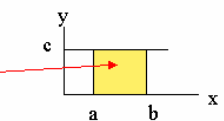
$$\therefore \frac{d}{dx} [f(x) g(x)] = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$$

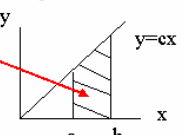
置換積分： $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$

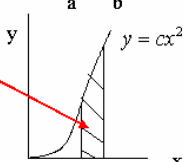
$$\therefore dx = \frac{d\varphi(t)}{dt} dt$$

## 1. 2. 5 簡単な練習問題

## 幾何学的説明

$$\int_a^b c dx = cx \Big|_a^b = c(b-a)$$


$$\int_a^b cx dx = \frac{1}{2} cx^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2} c(b^2 - a^2)$$


$$\int_a^b cx^2 dx = \frac{1}{3} cx^3 \Big|_a^b = \frac{1}{3} c(b^3 - a^3)$$


$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

## 指数関数の積分

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int \cosh ax dx = \int \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} dx = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2a} + c = \frac{1}{a} \sinh ax + c$$

$$\int \sinh ax dx = \int \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} dx = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} + c = \frac{1}{a} \cosh ax + c$$

$$\int \cos a\theta d\theta = \int \frac{e^{ja\theta} + e^{-ja\theta}}{2} d\theta = \frac{e^{ja\theta} - e^{-ja\theta}}{2aj} + c = \frac{1}{a} \sin a\theta + c$$

$$\int \sin a\theta d\theta = \int \frac{e^{ja\theta} - e^{-ja\theta}}{2j} d\theta = -\frac{e^{ja\theta} + e^{-ja\theta}}{2a} + c = -\frac{1}{a} \cos a\theta + c$$

## 積分の例題

$$\int (3x-2)^5 dx, \quad 3x-2=t \Rightarrow x=\frac{t+2}{3}, dx=\frac{1}{3} dt$$

$$\therefore \int (3x-2)^5 dx = \int t^5 \frac{1}{3} dt = \frac{1}{18} t^6 + c = \frac{1}{18} (3x-2)^6 + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \int \cos 2x dx + \int dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin 2x + x \right) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} [\log|x-a| - \log|x+a|] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

## 置換積分の例題

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}}, \quad \sqrt{x^2 + A} = t - x \Rightarrow x^2 + A = t^2 - 2tx + x^2, x = \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{1}{2}t - \frac{A}{2t}, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{A}{t^2} \right)$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + A} = t - x = t - \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{t^2 + A}{2t}, dx = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{A}{t^2} \right) dt = \frac{t^2 + A}{2t^2} dt$$

$$\text{よって, } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \int \frac{2t}{t^2 + A} \cdot \frac{t^2 + A}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|x + \sqrt{x^2 + A}| + c$$

## 部分積分の例題

$$\int \log|x| dx, \quad f(x) = x, g(x) = \log|x|$$

$$\therefore \int \log|x| dx = (\log|x|)x - \int \left[ \frac{d}{dx} \log|x| \right] x dx$$

$$= x \log|x| - \int \frac{1}{x} x dx = x \log|x| - x + c$$

$$\int x e^x dx, \quad f(x) = e^x, g(x) = x$$

$$\therefore \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = e^x (x - 1) + c$$

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx, A \neq 0 \quad x = f(x), \sqrt{x^2 + A} = g(x)$$

$$\therefore \int \sqrt{x^2 + A} dx = x \sqrt{x^2 + A} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 + A}} dx = x \sqrt{x^2 + A} - \int \frac{x^2 + A - A}{\sqrt{x^2 + A}} dx$$

$$= x \sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A} dx + A \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = x \sqrt{x^2 + A} - \int \sqrt{x^2 + A} dx + A \log|x + \sqrt{x^2 + A}| + c$$

$$\therefore 2 \int \sqrt{x^2 + A} dx = x \sqrt{x^2 + A} + A \log|x + \sqrt{x^2 + A}| + c$$

$$\text{よって, } \int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{x^2 + A} + A \log|x + \sqrt{x^2 + A}| + c \right)$$

## 練習問題

(1) 微分の定義を書きなさい。

<<解答>> ある任意の関数  $f(x)$  の  $x$  に関する微分は下式の様な極値演算で定義される。関数が  $f(x)$  で、 $x$  が  $x$  から  $x+h$  へ変化する場合、 $f(x)$  から  $f(x+h)$  に関数値が変化する場合、 $h \rightarrow 0$  になった場合の極値である。要するに無限に小さい区間に置ける関数の変化率が微分である。

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(2) 微分の定義を使って以下の関係を示しなさい。

$$f(x) = x^n, \quad \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1}$$

<<解答>>

$$f(x) = x, \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

$$f(x) = x^2, \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x$$

.....

$$\therefore f(x) = x^n, \quad \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

(3) 自然数  $e$  は次のように定義される。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k})^k = 2.71828459 \dots$$

次の関係を示しなさい。

$$\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$$

<<解答>>

$$f(x) = \log(x)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h}$$

$$\text{変数変換} : k = \frac{h}{x}, \quad h = xk, \quad h \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, x : \text{const}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\log(x+xk) - \log(x)}{xk} \right]$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\log \frac{x+xk}{x}}{k} \right] = \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(1+k) = \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow \infty} \log(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{k \rightarrow \infty} (1+k)^{\frac{1}{k}} = 2.71828459 \dots \quad \text{自然数}$$

$$\therefore \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow \infty} \log_e (1+k)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{x} \quad \text{or} \quad \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$$

(4)  $\frac{d}{dx} e^{-x}$ を計算しなさい。

<<解答>>  $y = e^{-x}, \log y = -x, -\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{-x} = -e^{-x}$$

(5)  $\frac{d}{dx} e^{-ax}$ を計算しなさい。

<<解答>>  $y = e^{-ax}, \log y = -ax, -a \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} e^{-ax} = -ae^{-x}$$

(6)  $\frac{d}{dx} (ax[bx+c])$ を計算しなさい。

<<解答>>  $\frac{d}{dx} (ax[bx+c]) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)[b(x+h)+c] - ax[bx+c]}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ab(x+h)^2 + ac(x+h) - ax[bx+c]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ab(x^2 + 2xh + h^2) + ac(x+h) - ax[bx+c]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{2abxh + abh^2 + ach}{h} \right] = 2abx + ac = a[bx+c] + axb$$

$$= \left[ \frac{d}{dx} (ax) \right] [bx+c] + ax \left[ \frac{d}{dx} [bx+c] \right]$$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}}$$

$$(7) \quad \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)} \text{を示しなさい。}$$

<<解答>>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h) g(x)} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}$$

(8) テイラー級数の定義は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{h^i}{i!} \left[ \frac{d^i}{dx^i} f(x) \right]_{x=a} + R_{n+1} \\ R_{n+1} &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left[ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} f(x) \right]_{x=\zeta} \quad a \leq \zeta \leq a+h \end{aligned}$$

$e^x$ のテイラー（マクローリン）展開を計算しなさい。

$$\begin{aligned} \langle \langle \text{解答} \rangle \rangle \quad e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= \cosh x + \sinh x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{双曲線関数の定義: } e^x = \cosh x + \sinh x}$$

(9)  $e^{jx}$ のテイラー（マクローリン）展開を計算しなさい。但し、 $j$ は複素数で  $j = \sqrt{-1}$  である。

$$\begin{aligned} \langle \langle \text{解答} \rangle \rangle \quad e^{jx} &= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + jx - j \frac{x^3}{3!} + j \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= \cos x + j \sin x \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Eulerの公式: } e^{jx} = \cos x + j \sin x}$$

(10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  をテイラー級数を使って示しなさい。

$$\begin{aligned} \langle \text{解答} \rangle \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{1}{3!} x^2 + \frac{1}{5!} x^4 - \frac{1}{7!} x^6 + \dots \right] = 1 \end{aligned}$$

(11)  $y = x$  の積分の物理的意味を説明しなさい。

$\langle \text{解答} \rangle$   $y = x$  は原点から勾配1の直線である。仮に原点から  $x = X$  点の線分下の面積  $S$  を考えれば、 $S = \frac{1}{2} X^2$  である。

$x$  軸の原点から  $X$  までを  $m$  等分し、 $\Delta x = \frac{X}{m}$  とすれば、原点から  $x = X$  の線分下の面積  $S$  は近似的に

$$S \approx \sum_{i=1}^m i \Delta x \cdot \Delta x$$

となるから、 $m \rightarrow \infty$  とすれば、

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m i \frac{X}{m} \cdot \frac{X}{m} = \int_0^X x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^x = \frac{1}{2} X^2$$

である。

従って、 $y = x$  の  $x$  に関する積分は1次関数を2次関数へ変える演算であり、物理的には線を無数に並べて面にする演算である。

(12) 次の条件を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。  $f'(x) = (3x^2 + 1)(x - 4)$

$\langle \text{解答} \rangle$   $f'(x) = (3x^2 + 1)(x - 4) = 3x^3 - 12x^2 + x - 4$  であるから、微分してこのような関数になるのは次のような関数である。

$$f(x) = \frac{3x^4}{4} - 4x^3 + \frac{x^2}{2} - 4x + C, \quad C: \text{積分定数}$$

(13) 次の不定積分を求めよ。  $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 3}{x} dx$

$\langle \text{解答} \rangle$  微分して  $\frac{x^4 - 3x^2 + 3}{x}$  となる関数を探せばよい。

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 3}{x} = x^3 - 3x + \frac{3}{x} \text{ であるから、この不定積分は}$$

$$\int \frac{x^4 - 3x^2 + 3}{x} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 3 \log x + C, \quad C \text{ は積分定数}$$

(14) 次の不定積分を計算せよ。  $\int x \sin x dx$

<<解答>> 二つの関数  $x, \sin x$  の積と見て、部分積分を使う。

ここでは、 $f(x) = -\cos x, g(x) = x$  とみなして、 $\frac{df(x)}{dx} = \sin x, \frac{dg(x)}{dx} = 1$  であるから、  

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C$$

(15) 次の不定積分を求めよ。  $\int x e^x dx$

<<解答>>  $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c$

(16) 次の不定積分を求めよ。  $\int \tan x dx$

<<解答>> 
$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(-\cos x)}{\cos x} dx = -\log_e \cos x + c$$

(17) 次の不定積分を求めよ。  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

<<解答>> 
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \left( \frac{-\frac{1}{2} \frac{dZ}{dx}}{\sqrt{Z}} \right) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} dZ = -\sqrt{Z} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

但し、 $Z = 1 - x^2$

$$\therefore \frac{d}{dx}[-\sqrt{1-x^2} + c] = -\frac{d\sqrt{Z}}{dZ} \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{2} Z^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(18) 次の不定積分を求めよ。  $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$

<<解答>> 割り算を実行する。

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx = \int \left( 1 + \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} \right) dx$$

分母を因数分解する。

$$\begin{aligned} \int \left( 1 + \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} \right) dx &= \int \left( 1 + \frac{4x^2 + 13x - 9}{x(x+3)(x-1)} \right) dx = \int \left( 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{(x+3)} + \frac{2}{(x-1)} \right) dx \\ &= x + 3\log x - 2\log(x+3) + 2\log(x-1), \quad C \text{は積分定数} \end{aligned}$$

(19) 次の不定積分を求めよ。  $\int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx$

<<解答>>  $\int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx = \int \frac{1}{(x-2)} dx - \int \frac{1}{(x+5)} dx = \log_e(x-2) - \log_e(x+5) + c$

(20) 次の不定積分を求めよ。  $\int \frac{x}{5-x^2} dx$

<<解答>>  $\int \frac{x}{5-x^2} dx = -\frac{1}{2} \log_e(5-x^2) + c$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left[ -\frac{1}{2} \log_e(5-x^2) + c \right] = -\frac{1}{2} \frac{d \log Z}{dZ} \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(5-x^2)} (-2x) = \frac{x}{5-x^2}$$

但し、 $Z = (5-x^2)$

## 第2章 電荷、クーロン力、電界

### 2. 1 電荷

#### 2. 1. 1 定義

この世には電荷 (electric charge) というものがある。無理してたとえるなら力学でいう質量のようなものであろう。ただし、電荷には正負がある。正負の電荷を担うものは陽子や電子のようなミクロな粒子である。

電気現象が発見されたギリシャ時代は、摩擦した琥珀がものを引き付ける奇妙な現象ととらえられていたが、現在の我々は電子が負の電荷を持ち、陽子が正の電荷を持つことを知っている。電子と陽子の持つ電荷は符号が逆なだけであり、大きさはまったく等しいということも知っている。

原子は陽子と中性子（電荷を持たない粒子）からなる原子核、そして電子からできている。原子は通常、原子核内の陽子の正電荷と電子の負電荷が同数であり、全体としては中性であるが、電子がなんらかの原因で減少したり、逆に増加したりする。このような場合、電子の分だけ負電荷が多かったり少なかったりする。この状態がイオンである。

イオンは原子によって正イオンになるか負イオンになるか、もしくはなりやすいかどうか決まっている。これを電気陰性度という。身近なところでは、乾電池などは金属イオンの受け渡しで電子を流して電流を発生させている。健康器具などで、よくマイナスイオンがどうか宣伝していることがある。

電荷は電子と陽子で同じ大きさで、その大きさがそのまま電荷の量の最小単位になっている。その大きさは

$$e = 1.6 \times 10^{-19} [C]$$

であり、とても小さな量である。これを電気素量という。この単位  $C$  とはクーロンというものであり、電荷の大きさを表す単位である。 $1C$  とは  $1A$  の電流が  $1s$  の間に運ぶ電荷であると定義される。

$$1C = 1A \times 1s$$

物体  $A$  と  $B$  を擦り合わせると物体  $A$  の原子の外側にある電子が摩擦によって剥ぎ取られ物体  $B$  に移動する現象を摩擦電気という。当初、物体を構成する原子の陽子数と電子の数が同じで、電氣的には中性であるが、ある物体（絶縁物等）の外側の原子は機械的摩擦等によって容易に剥ぎ取られるものがあり、これを擦り合わせると電子が剥ぎ取られる。電子を剥ぎ取られた物体  $A$  は電子の分だけ電荷が不足し、陽子は正の電荷を持っているから、物体  $A$  は正の電荷を持つことになり、これを正に帯電したという。電子を剥ぎ取った物体  $B$  は電子が過剰になった分だけ、電子の持つ負の電荷によって物体  $B$  は負の電荷を持つことになる。これを負に帯電したという。

電荷の中で、特にその大きさが無視でき、点のように扱うことができるものを点電荷という。

## 2. 1. 2 電荷保存の法則

電荷は消滅したり生成したりしない。これを電荷保存の法則という。

## 2. 1. 3 物質の電氣的分類

全ての物質は電氣的性質により、三種類に分類される。最初は電気を伝導しやすい物質である導体である。代表的な例として金属が挙げられる。金属が電気を伝導しやすい性質をもっているのは、その内部にある自由電子に起因する。また、電解質溶液も導体の一種と考えられる。この場合、電荷を運ぶのはイオンである。次は不導体（絶縁体、誘電体ともいう。）である。この物質は電気を通さない。例えば、ガラス、セラミック、ゴム、エボナイト、プラスチックなどが挙げられる。最後は導体と不導体の中間の性質をもつ半導体である。例としてはシリコン、ゲルマニウムなどが挙げられる。半導体は導体としたり不導体とする制御が可能であるため、エレクトロニクスで最も重要な物質である。

全ての物質は、これら三種類のなかのいずれかである。このため、全ての物質は電気と関係があるといえる。特別な物質だけが電気に関係するのではない。

## 2. 2 クーロンの法則

### 2. 2. 1 クーロン力

電荷間に働く力の関係はクーロンが実験で明らかにした。2つの電荷の間に働きあう静電気力（クーロン力）の大きさ  $F[N]$  は次式で表される。

$$F = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.1)$$

この関係をクーロンの法則という。ただし、 $k_0$  はクーロンの比例定数で次の値をもつ。

$$k_0 = 9.0 \times 10^9 [N \cdot m^2 \cdot C^{-2}]$$

また、 $q_1[C]$ 、 $q_2[C]$  は電荷、 $r[m]$  は電荷の間の距離である。電荷  $q_1[C]$ 、 $q_2[C]$  が異符号のときは引力が、同符号のときは斥力が働く。

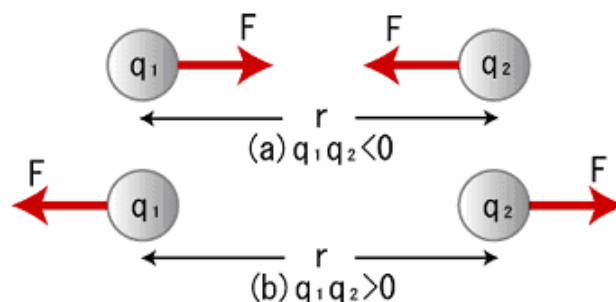


図 2.1 クーロン力

(2.1)式は実験によって発見されたものであり、理論的に導かれたものではない。

### 2. 2. 2 クーロンの実験

クーロン (Charles Augustin De Coulomb 1736-1806) は大きなガラス管を垂直に立て、その

中心軸に沿って絹糸を張り、この中程に水平に(つまり、糸に対して直角に)ワックスを塗った麦ワラをとり付け、その端に小球をとりつけ帯電させた。麦ワラの反対側には小球と同じ重量の重しをつけてバランスをとって、麦ワラを水平に保つ。小球の位置で、管の外周に目盛を切っておく。こうすれば小球が絹糸を軸として水平に回転した時の小球の動いた距離を正確に測ることで非常に小さな力を正確に測定することが出来る。そして、管の中に別の帯電した小球を入れて麦ワラに取付けた小球に近づけると、その間に働く電気による引力、または反発力によって、麦ワラにつけた球は移動するのでそれを目盛で読み移動量を測定しそれを力に換算する。

電荷間に働く電気による引力または反発力の大きさを測定した結果、その力は電荷の大きさに比例し、電荷間の距離の自乗に反比例することが明らかになった。

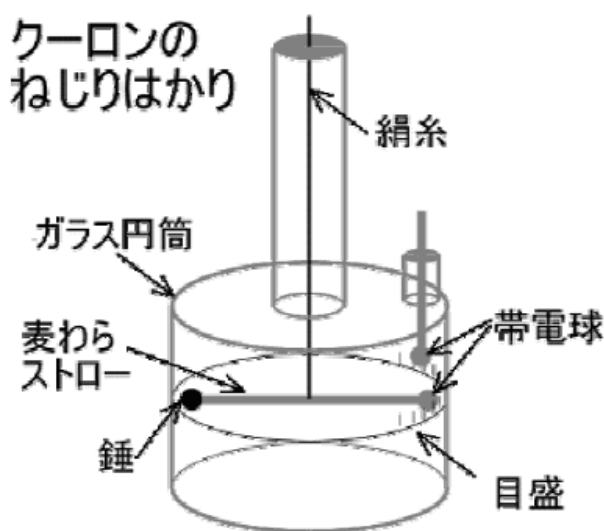


図 2.2 クーロンの実験装置

## 2. 3 電界

### 2. 3. 1 電界とクーロン力

クーロンはニュートンに導かれるようにしてクーロンの法則に至った。そして、基本となった万有引力の法則は「遠隔作用説」と呼ばれる考え方で構成されている。

遠隔作用説とは、二つの質点間に作用し合う力は直接にこれら二個の質点間で生じているとする考え方である。すなわち、二個の質点は遠く隔てられているが、両者間に働く力は直接に作用し合っているとする考え方である。太陽と地球の間には引力があるが、その力は太陽と地球間でのみ直接的に関わっているから、もし双方の何れかが存在しなければこの力は消える。クーロンの電荷間の力の解釈もこれと同様である。両電荷間に働く力は両電荷があってこそ初めて生じるものであって、どちらか一方がなければクーロン力は働かない。このような考え方が遠隔作用説である。

これに対して、二個の電荷間の力はどちらか一方が存在する場合にはそれが存在しない場合と空間の物理的状況が異なり、電荷の周囲には電荷が存在することによって生ずる物

理的状況が出現する。これを場 (field) といい、この場合は電場または電界(electric field)という。このようにして、二個の電荷が存在して初めて力が生ずるとしなくてもどちらか一方が存在すると、その電荷の周辺に電界が生ずるが、そのように場が存在することを明示するためにもう一個の電荷を持ってくればこれらの電荷間に力が生じ、これがクーロン力とする考え方がある。このように「一個の電荷が存在するだけで電荷近傍に場が生じ、その場が周辺に及んで電界を構成しているのであって決して離れた電荷間で直接力が及ぼし合っているのではない」という考え方を「近接作用説」という。この近接作用説にしたがって(2.1)式を解釈すると、(2.1)式で  $q_2$  を単位の電荷量 1 とすれば、それが受ける力は

$$\mathbf{F} = 1\mathbf{E} = 1 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

であるから、 (2.2)

$$\mathbf{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

となる。ここで、この  $\mathbf{E}$  を電界(electric field)と名付けることにする。

近接作用説と遠隔作用説は、この段階で大して学說的違いはないように思われる。ところが、遠隔作用説では思考の発展性が少ないのに対して近接作用説は極めて広い思考の拡張の余地がある。後に、電磁波や 20 世紀の量子力学などが発展していくためには、近接作用説の考え方が大きな役割を果たしていく。論理学というのは単に方便ではなく、思考の発展性が与えられるとき、その真価が発揮される。

## 2. 4 静電応用

### 2. 4. 1 ピエゾ効果とその応用

**piezoelectric effect** ピエゾ効果, 圧電効果 ある種のセラミックや水晶などに力を加えると、それによる歪みに応じて電圧が発生する事。かけた電圧に応じて結晶が変形することは逆圧電効果と呼ばれる。名前はギリシャ語の *piezein* (押す) に由来。1880 年、キュリー夫人の夫、ピエールと兄のジャック・キュリーが発見。

原理は 1880 年に発見され、ひずみなどの力学的変化を電気信号に変換する素子として利用されてきた。たとえば、ライターの着火源などは結晶に強い圧を加える事で、10000V ほどの電圧を発生させ、火花を飛ばす。地下で岩石が壊れる時の圧力の変化でも生じる。

**piezoelectric device** 圧電素子 電圧を加えると変形する性質 (圧電効果) を持つ材料を使い、電気信号を機械的な力や変位に変換する素子、および外力を電気信号に変換する素子の総称。前者の例としては、圧電スピーカー、圧電アクチュエーターが、後者の例としては、圧電マイク、圧電ピックアップなどがあり、電子ライター等の発火装置も圧電素子を使っている。

**piezoelectric device** ピエゾ素子 2 枚の電極で圧電体を挟む構造のもので、電圧をかけることで上下に振動する。この振動を利用すれば、うちわで扇ぐような動作で、エアフローを生み出せ、ヒートシンクの谷の部分で振動により溜まった熱を放熱すれば、冷却機能の実

装面積を縮小できる。これにより、ファンの約 10 倍の低消費電力で、同等の放熱性能が得られる。また、ベアリングなどのような可動部がないため長寿命で、静音性にも優れる。

**圧電スピーカー** 厚みが小さく、小さな入力電力で動作するのが特徴。小型化のために電子機器に多用されている。

**piezo drive ピエゾドライブ** 逆圧電効果を利用した機械的な制御機構。セラミック結晶などに電圧をかけ、ゆっくり縮ませずばやく伸ばすなどが可能。インクジェットプリンターのヘッドに、クローン動物などの卵子の操作で、針を刺すためにも用いられている。

## 2. 4. 2 インクジェットプリンター

インクジェットプリンターといえばパソコン用を思い浮かべる。インクを飛ばして対象物に印字するのは同じであるが、産業用インクジェットプリンターは様々な工業製品に生産ライン上で直接印字するため、使用するインクの種類や用途が異なる。

表 2. 1 インクジェットプリンターの種類と用途

	パソコン用	産業用
インクが飛ぶ距離	5mm 程度	10～30mm
対象物	専用紙	限定なし、金属製・樹脂など 染み込まないものでも可
インクの種類	水性	溶剤性
主な用途	家庭やオフィスでの文書印刷に	缶ビールの底などへの 製造日付、記号の印字に

産業用は、対象物が紙に限らず、包装フィルム・缶・PET ボトルなどあらゆる材質に印字する必要がある。また多くの場合、生産ライン上で製品が移動中に印字するため、インクは 1 秒程度で乾く速乾性のものを使用する。しかも指でこすったくらいでは落ちない強度も要求される。そのため産業用のインクジェットプリンターのインクはいわば「瞬間接着剤」のように扱われる。産業用のインクジェットプリンターは“機械の中ではインクを乾かさずに保持し、微細なインク粒を作って精度良く飛ばし、製品に文字を書いた瞬間インクを乾かす”とても賢い超精密機械と言える。

実際に印字する様子は、ベルトコンベアの上をドンドン流れる製品に、音も無くフッと文字が現れるようで不思議な感じを与える。

**インクジェットプリンターの原理** プリントノズルから、加圧されたインクが飛び出す。インクは振動を受けながら粒子化され、同時に帯電を受け、負電荷が飽和した状態のまま、偏向電極板を通過する。このときに、正の電荷を帯びた偏向電極板側にインクは、引き寄せられ、飛ぶ方向を変化させる。これをひと粒ごとに制御する。インク粒は、縦 1 列に飛び出すため、印字対象物が横方向に移動することで、文字を描く。

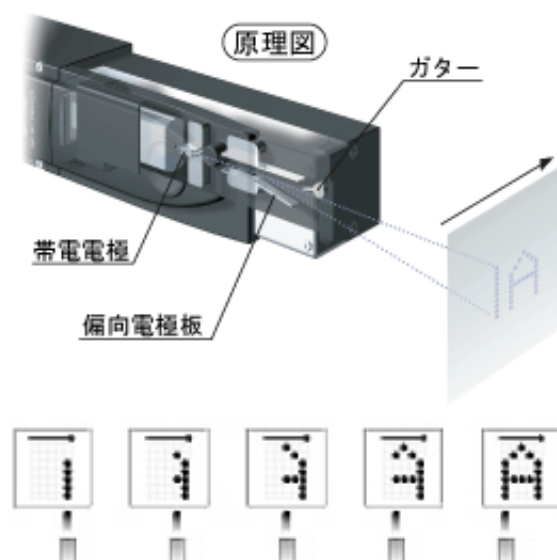
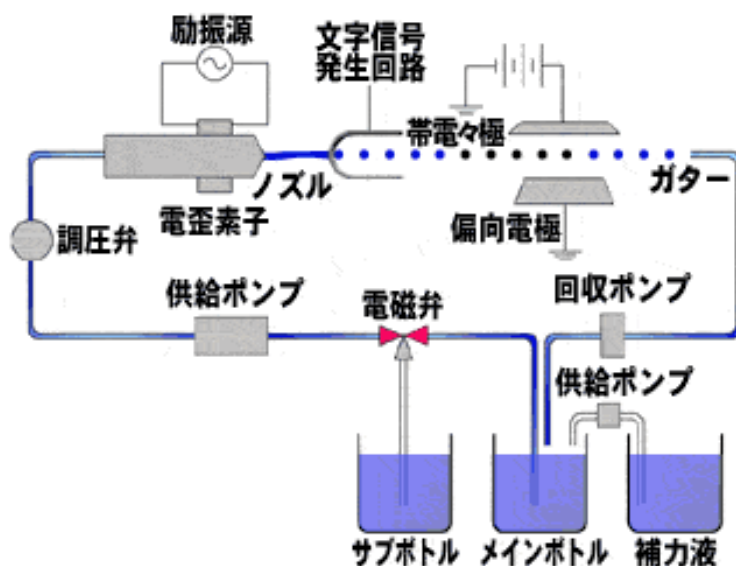


図 2.3 インクジェットプリンターの原理図



2.4 図 インクジェットプリンターの動作概略

文字をドットマトリクスに画素分割し、各画素の位置情報に比例した電圧でインク粒子を帯電。さらにそれを静電場で偏向して印字物に到達させることで印字する。

- ・メインボトルのインクを供給ポンプで加圧し、ノズルから液柱状に噴出させる。
- ・液柱を電歪素子の振動で一定の大きさのインク粒子にする。
- ・インク粒子 1 個ごとに、帯電電極で印字ドット位置情報に対応した電圧に帯電させる。
- ・帯電したインク粒子は、偏向電極間の通過時に帯電量に応じた偏向を受け、印字物に到達。
- ・印字されないインク粒子は、ガターで捕えて回収ポンプでメインボトルに回収。
- ・サブボトルは使用インク量を、補力液は濃度を、一定に保つようメインボトルに補給する。

**インクジェットプリンターのしくみと現状** インクジェットプリンターの構成はきわめてシンプルである。主要部はインクジェットヘッドとインク及びインク容器（インクカートリッジ）で、メカニズムとして紙を縦の副走査方向に送る機構とヘッドを左右の主走査方向に動かす機構がある。信頼性のうえではヘッドのメンテナンス機構が重要であり設計上難しい部分でもある。あとはコンピュータとのインタフェースや制御装置がある。

インクジェットは印刷のプロセスも電子写真にくらべて非常にシンプルである。ヘッドからインクを飛ばし、インクがなくなればカートリッジから供給する。これがヘッドの中で起こるプロセスである。そしてメディアつまり紙の上にインクが着滴して浸透して定着されるプロセスがある。

このようにインクジェットにおいて

第 1 の特徴は、ヘッド・インク・メディアの 3 つの要素から成り立つ非常にシンプルな構成だということである。

第 2 に、それらの相互依存性が低く、トナーの帯電性が全体のプロセスに響く電子写真技術とは異なるという特徴がある。

第 3 の特徴は非接触プロセスだということである。インクはヘッドから 1mm 程度のギャップを隔てて紙に着き、その間に接触部分がない。インクがまっすぐ飛びさえすれば、ずれのない精度の高い画像が形成できる。

第 4 に、浸透を伴うため、画像品質はインクとメディアに依存するということである。インクジェットは電子写真とは異なり、インクが紙の中に浸透していく。そのため、第 2 の特徴と矛盾した言い方になるが、画像品質はメディアとインクの物性に依存する。これは必ずしも欠点ではなく、紙質を生かすために好んで使われる場合もある。

結論として、インクジェット技術の最大の特徴はスケラブルだということである。小さいものから大きいものまで基本的に同じ技術が使える。また組み合わせの自由度が高いのも大きな特徴である。ヘッドとインクはいろいろな組み合わせが可能だし、平らに送る機構さえあればいろいろなメディアに対応できる。

**連続噴射型とオンデマンド型** インクの飛ばし方の種類は連続噴射型（コンティニュアスインクジェット）とオンデマンド型（ドロップオンデマンドインクジェット）の 2 つがある。連続して打つとパターンが作れないので、コンティニュアス型ではインクを帯電させて電界でコントロールする荷電制御方式を採用している。プラスチックや金属などに印字するためには、速乾性インクが必要であるが、オンデマンド型では、ノズルでインクが固化する。そこで、印字しないときも含め、運転中は常時インクを噴出するようにしているのが「連続噴射型（コンティニュアスインクジェット）」である。

● ポンプで加圧供給されるインクに、噴出時にピエゾ素子によって一定の振動を与える。ノズルから噴出したインクは、このため、微細なインク滴になって飛んでいく。

● 印字しないときはそのままインク回収口に飛び込み、インクは回収される。印字信号にしたがってインク滴を帯電させると、偏向電極間を通過中に電界に影響され、軌道がずれ

て印字対象に向かって飛ぶようになる。

- この帯電電圧を調整し、軌道を制御することで、1 ノズルで 32 ドット程度の文字を印字する。
- 軌道の角度によってドットを構成するため、対象物とノズルとの距離により文字の大きさは変わる。インクの飛距離があるため、比較的離れた位置でも印字可能。
- インク滴は文字の大きさに比べて充分小さいので、印字された文字は典型的なドット文字になる。平面ではないものにも印字可能なことも特長である。食品などの個別包装への印字に、特に適性のある方式。
- このタイプのインクジェットプリンターは、速乾性インクを使用しているため、運転終了後、ノズルでインクが固まらないようにする必要がある。
- ノズルを自動洗浄してインクを洗い流す、という方法もあるが、溶剤を使用するため、インクの比重が不安定になりがちという欠点に伴う。

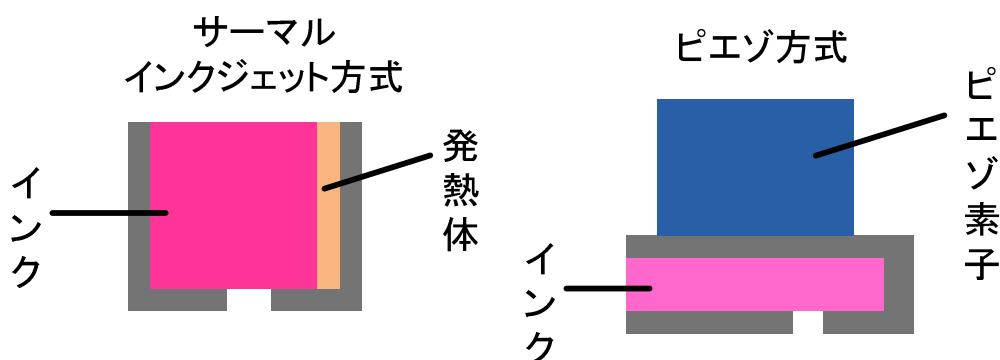


図 2.5 インクジェット生成方式

ヘッドを用紙の左右に行き来させながらインクを発射してプリントする。インクを発射する原理で一般に多く使われているのが、ピエゾ方式、サーマルインクジェット方式である。

- ・ ピエゾ方式は、電圧をかけると変形するピエゾ素子を使ってインクを押し出すしくみ。
- ・ サーマルインクジェット方式は発熱体によって気泡を発生させて圧力をかけ、インクを発射する。

液体の吐出方式によって 2 種類に分かれる。1 つは「ピエゾ方式」である。電圧を加えると変形する圧電素子を使い、圧電素子にパルスを印加することにより瞬間的にインク室の液圧を高め、これによりノズルから液体を押し出す。セイコーエプソンがプリンターで採用する。

もう 1 つは「サーマル方式」である。ノズルの内部にあるヒータを熱して気泡を発生させ、その気泡の圧力によってインク粒を飛ばす。小さいインク粒を飛ばす場合にはヒータを 1 個、大きいインク粒を飛ばす場合にはヒータを 2 個、それぞれオン状態にして、インク粒を飛ばす圧力を変化させる。キヤノンや米 Hewlett-Packard Co. がそれぞれプリンター

で採用する。なお、キヤノンは自社のインクジェットヘッド構造を、サーマル方式ではなく「バブルジェット方式」と呼ぶ。

**インクジェットの最近の技術傾向** インクジェット技術は、現在ではインク粒は数ピコリットルを達成し、色数は 6 色以上を使うことによって写真画質を達成している。また、これまでインクジェットの課題とされてきた保存性や濃度は、顔料インクを使うことで改善されつつある。顔料を使ったときの光沢の問題も許容できるレベルになりつつある。色の再現範囲は染料のほうが広いが、顔料も改良されて染料に匹敵する色範囲を達成できつつある。また、スループットにかかわる要素としてヘッドの幅がある。ヘッドの移動速度を速くするにはいろいろな問題があるため、ヘッド幅を広げて速度を向上させる必要がある。現在は 1 インチ幅のヘッドを達成している。

## 練習問題

(1) 次の文章中の(a)～(m)に当てはまる言葉を書きなさい。また、(A)に当てはまる数値を小数第3位まで答えなさい。

プラスチックの下敷きを乾いた布でこすると、髪の毛や紙をひきつけることは誰でも経験したことがあり、よく知っていることである。この現象は、こすることによってプラスチックが(a)を帯びたために起こる。物体が(a)を帯びることを(b)という。(b)した物体の間には(c)が働く。この(c)は個々の電荷の間に働く(c)を足し合わせた(c)と考えることができる。しかし、この電荷間の(c)は万有引力のように常に(d)ばかりではなく、(e)の場合もある。この(c)は次のように考えることができる。すなわち、自然界には(f)と(g)の2種類の(a)が存在し、同符号の(a)どうしは(h)し合い、異符号の(a)どうしは(i)。この(a)間の(c)は静電気力または(j)とよばれる。電荷の単位には(k)[(l)]が用いられる。陽子の電荷を $e$ で表すと、電子の電荷は $-e$ で表され、この電荷 $e$ はこれ以上分割できない電荷の最小単位であって、(m)とよばれる。この(m)の値は $e = (A) [(l)]$ である。

<<解答>> (a)電荷 (b)帯電 (c)力 (d)引力 (e)斥力 (f)正 (g)負 (h)反発 (i)引き合う

(j)クーロン力 (k)クーロン (l)C (m)電気素量 (A) $1.602 \times 10^{-19}$

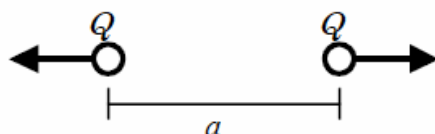
(2) 次の文章中の(a)～(d)に当てはまる言葉を書きなさい。外界と電荷のやり取りをしない(a)した系では、電荷の(b)などによって電荷の空間的分布が変化しても、その系内の電荷量の(c)は常に一定に保たれている。これを(d)という。

<<解答>> (a)孤立 (b)移動 (c)総和 (d)電荷の保存則

(3) 次の文章中の(a)～(h)に当てはまる言葉を書きなさい。静止した2個の点電荷が互いに及ぼし合う力は、両電荷の(a)に比例し、電荷間の(b)の(c)に反比例する。これを(d)という。クーロン力も当然(e)の法則に従うので、電荷が及ぼし合う力は、2個の点電荷を結ぶ(f)に沿っていて、向きが(g)で大きさが(h)。

<<解答>> (a)積 (b)距離 (c)二乗 (d)クーロンの法則 (e)作用反作用 (f)直線 (g)反対 (h)等しい

(4) 真空中において $a$ だけ離れたそれぞれ $Q$ の電荷間に働く力はいくらか。また、どれだけの質量の物体に働く重力に相当するか。



<<解答>> 電荷間に働く力は、クーロンの法則より、

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$$

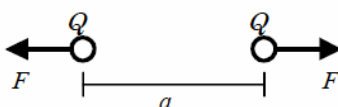
となり、この力を質量  $m$  の物体に働く重力と計算すると、重力加速度を  $g$  とすると

$$F = mg = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$$

$$m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 g} \frac{Q^2}{a^2}$$

となる。

(5) 2 個の導体球に同じ量の電荷を帯電させてから  $a$  だけ離れたとき、導体球の間には  $F$  の反発力が働いた。このとき、導体球に与えた電荷量はいくらか？



<<解答>> 導体球に与えた電荷量を  $Q$  とすると、クーロンの法則より

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$$

$$Q = 2a\sqrt{\pi\epsilon_0 F}$$

となる。

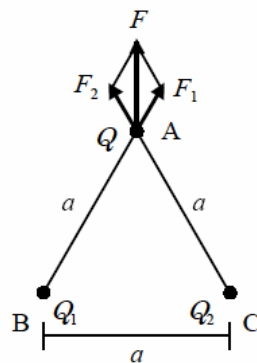
(6) 真空中で一辺が  $a$  の正三角形の頂点 A、B、C にそれぞれ電荷  $Q$ 、 $Q_1$ 、 $Q_2$  をもつ導体を置いたとき、電荷  $Q$  をもつ導体に働く力の大きさとその方向を求めよ。ただし、 $Q = Q_1 = Q_2$  とする。

<<解答>> この関係は右図のようにになる。A と B の間に働く力  $F_1$  と A と C の間に働く力  $F_2$  の大きさはクーロンの法則より以下のようにになる。

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_1}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_2}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} = F_1$$

図より、ベクトル  $F_1$  と  $F_2$  が作る三角形は底辺と斜辺の間が  $30^\circ$  の二等辺三角形なのでになる。したがって、



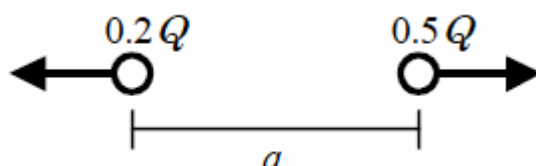
$$F = 2F_1 \cos 30^\circ = \sqrt{3}F_1 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$$

となり、方向は図の  $\mathbf{F}$  の方向になる。

(7) 真空中で  $a$  の距離に 2 個の点電荷があり、それぞれ  $0.2Q$  および  $0.5Q$  の電荷をもっている。この電荷間に働く力の大きさはどのくらいか？

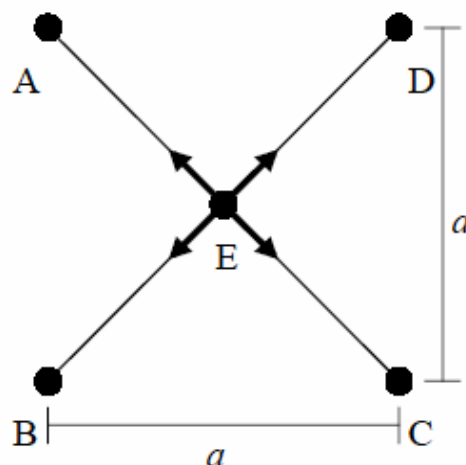
<<解答>> 題意からクーロンの法則より  $Q_1 = 0.2Q$ 、 $Q_2 = 0.5Q$  なので

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0.2Q \times 0.5Q}{a^2} \\ &= \frac{0.1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} = \frac{1}{40\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2} \end{aligned}$$



(8) 真空中で、正方形の各頂点 A、B、C、D にそれぞれ  $Q$  の電荷が配置してある。この正方形の重心に相当する点 E に  $2Q$  の電荷が配置してあるとして、E の位置の電荷に働くクーロン力の方向と大きさを求めよ。ただし、正方形の各辺の長さは  $a$  とする。

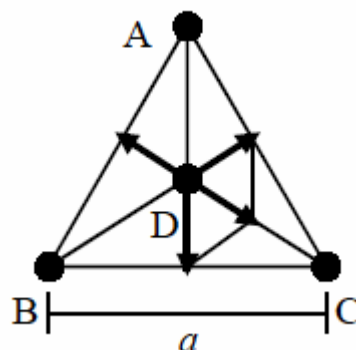
<<解答>> 正方形の重心 E は対角線 AD と対角線 BC の交点であり、正方形の一辺の長さが  $2a$  なので各頂点から重心 E までの距離は  $2a \cos 45^\circ = \sqrt{2}a$  となる。各頂点の電荷は  $Q$  で等しいことから、クーロンの法則より各頂点と重心 E の間に働くクーロン力はすべて等しく、その向きは各頂点から重心 E に向かう方向となる。よって、A と E の間に働くクーロン力と D と E の間に働くクーロン力は打ち消しあい、B と E の間に働くクーロン力と C と E の間に働くクーロン力でも同様なことから、結果として、重心 E に働く力はゼロとなる。



(9) 真空中で、正三角形の各頂点 A、B、C にそれぞれ  $Q$  の電荷が配置してある。この正三角形の重心に相当する点 D に  $2Q$  の電荷が配置してあるとして、D の位置の電荷に働くクーロン力の方向と大きさを求めよ。ただし、正三角形の各辺の長さは  $a$  とする。

<<解答>> 正三角形の重心は 3 本の中線が交差する点であり、重心によって分けられる中線の長さの比は 2:1 になる。各頂点から重心までの距離  $r$  は

$$r = \frac{2}{3} a \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$



となる。よって各頂点から重心 D に働く力はクーロンの法則より

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q \times Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q^2}{\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{3}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$$

となってすべて等しく各頂点→重心の方向となる。いま頂点 A から重心 D に働く力と頂点 B から重心 D に働く力の合力を考えると、 $F \times 2 \cos 60^\circ = F$  となり、方向は重心から D から頂点 C の向きとなる。これは頂点 C から重心 D に働く力と等しくなり打ち消しあう。よって重心 D に働く力はゼロとなる。

(10) 真空中で  $2a$  の距離離れて A 点に  $+Q$ 、B 点に  $-Q$  の電荷をもつ点電荷がある。さらに、AB を底辺にして A、B から共に  $1.5a$  離れた二等辺三角形の頂点 C に点電荷があり、この電荷は、A 点、B 点の電荷より力を受けて、AB に平行で A から B の方向に  $F$  の力を受けている。

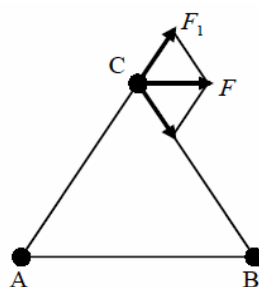
(a) A 点、B 点の電荷の間に働く力はいくらか。

(b) C 点の電荷はいくらか。

<<解答>> (a) クーロンの法則より

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \times (-Q)}{(2a)^2} = -\frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$$

$F < 0$  より引力が働いている。



(b) C 点の電荷を  $Q_C$  とすると、A 点から C 点に働く力の大きさ  $F_1$  はクーロンの法則より

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A Q_C}{(1.5a)^2} = \frac{1}{9\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_C}{a^2}$$

同様に、B 点から C 点に働く力の大きさ  $F_2$  は

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B Q_C}{(1.5a)^2} = \frac{1}{9\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_C}{a^2}$$

よって  $F_1$ 、 $F_2$  の大きさは等しい。図より  $F_1$ 、 $F_2$  の合力  $F$  は比を用いて

$$F_1 : \frac{1}{2} F = 1.5 : 1$$

$$F_1 = \frac{3}{4} F$$

となり、

$$F_1 = \frac{1}{9\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_C}{a^2} = \frac{3}{4} F$$

$$Q_C = \frac{27\pi\epsilon_0 a^2 F}{4Q}$$

が得られる。 $Q_C > 0$  より正電荷である。

(11) 次の文章中の(a)～(j)に当てはまる言葉を書きなさい。

距離  $r$  [m] 隔てて、2 個の点電荷  $q_1$  [C]、 $q_2$  [C] があるとき、一方が他方に及ぼす力  $F$  [N] は、クーロンの法則から(a)と表される。ここで  $\epsilon_0$  は真空の誘電率と呼ばれる量で  $\epsilon_0 = (b) [(c)]$  で表される。クーロン力は  $q_1$  と  $q_2$  が同符号のときには(d)となり、力が斥力になることを表している。また、両電荷が(e)のときには  $F < 0$  となり、力が引力になることを表している。力は(f) (方向・向き、大きさをもつ量) であるから、電荷  $q_1$  が  $q_2$  に及ぼす力  $F_{12}$  は(a)(g)と表される。ここで  $\mathbf{r}_{12}$  は電荷  $q_1$  が  $q_2$  に向かって引いたベクトルである。ベクトル(g)は  $\mathbf{r}_{12}$  方向の(h)を表していて、力  $F_{12}$  の(i)を与える。(a)で与えられる  $F$  が  $F_{12}$  の(j)である。

<<解答>>

$$(a) F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (b) 8.854 \times 10^{-12} \quad (c) \text{C}^2 / \text{Nm}^2 \quad (d) F > 0$$

$$(e) \text{異符号} \quad (f) \text{ベクトル量} \quad (g) \frac{\mathbf{r}_{12}}{r} \quad (h) \text{単位ベクトル}$$

$$(i) \text{方向} \quad (j) \text{大きさ}$$

(12) 次の文章中の(a)～(d)に当てはまる言葉を書きなさい。

複数の電荷 ( $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 、...、 $q_N$ ) が存在する場合を考える。1 つの電荷  $q_i$  が他の電荷から受けるクーロン力に関して次の(a)の原理が成り立つ。すなわち、1 個の電荷  $q_i$  が受

ける力は、他の電荷に独立に  $q_i$  に及ぼすクーロン力の (b) で与えられる。したがって、 $q_j$  が  $q_i$  に及ぼすクーロン力を  $F_{ji}$ 、 $q_j$  から  $q_i$  に向かって引いたベクトルを  $\mathbf{r}_{ji}$  とすれば、電荷  $q_i$  が受ける力  $F_i$  は

$$\begin{aligned} F_i &= F_{1i} + F_{2i} + F_{3i} + \cdots F_{Ni} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ((c)) \\ &= \sum_{j \neq i} ((d)) \end{aligned}$$

と書き表すことができる。

<<解答>>

(a) 重ね合わせ (b) ベクトル和

$$(c) \frac{q_1 q_i}{r_{1i}^2} \frac{\mathbf{r}_{1i}}{r_{1i}} + \frac{q_2 q_i}{r_{2i}^2} \frac{\mathbf{r}_{2i}}{r_{2i}} + \cdots \frac{q_N q_i}{r_{Ni}^2} \frac{\mathbf{r}_{Ni}}{r_{Ni}} \quad (d) \frac{q_j q_i}{r_{ji}^2} \frac{\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}}$$

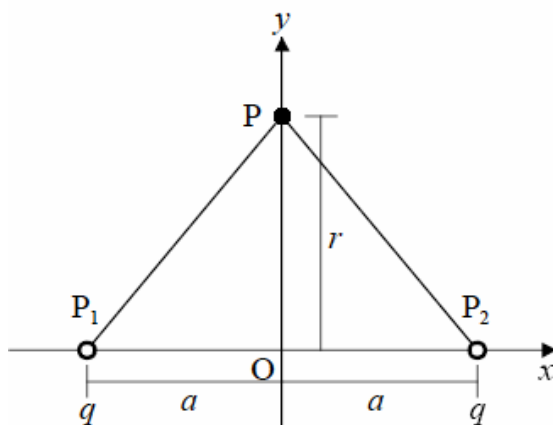
(13) 図のように、 $x$  軸上の 2 点  $P_1$  ( $-a, 0$ )、 $P_2$  ( $a, 0$ ) に同じ  $q$  の電荷があるとき、 $y$  軸上で原点  $O$  から  $r$  だけ離れた点  $P$  での電界を求めよ。

<<解答>>  $P_1$  及び  $P_2$  にある電荷が点  $P$  につくる電界をそれぞれ  $E_1$ 、 $E_2$  とするとその大きさは

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2} = E_1$$

となり、大きさが等しくその向きが  $y$  軸に対して対称になり、そのベクトル和は  $y$  軸



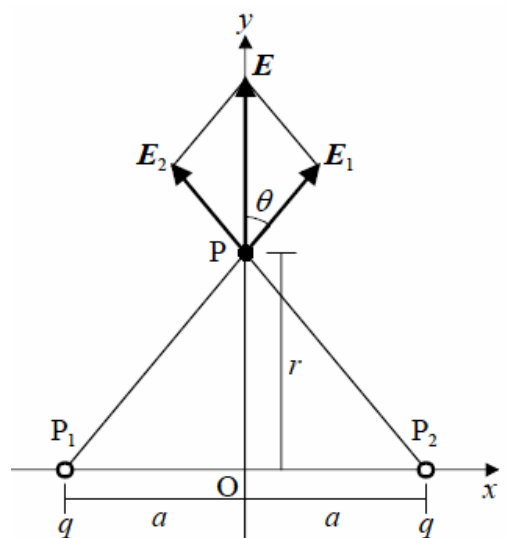
に平行な方向となることがわかる。 $E_1$  及び  $E_2$  が  $y$  軸となす角を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

なので  $E_1$  と  $E_2$  の合計から得られる点  $P$  での電界  $E$  の大きさは

$$\begin{aligned} E &= 2E_1 \cos \theta \\ &= 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2} \times \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qr}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となり、その方向は  $y$  軸に平行な方向となる。



(14) 図のように、 $x$  軸上の 2 点  $P_1$  ( $-a, 0$ )、 $P_2$  ( $a, 0$ ) に  $-q$  と  $q$  の電荷があるとき、 $y$  軸上で原点  $O$  から  $r$  だけ離れた点  $P$  での電界を求めよ。

<<解答>>  $P_1$  及び  $P_2$  にある電荷が点  $P$  につくる電界をそれぞれ  $E_1$ 、 $E_2$  とするとその大きさは

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2} = E_1$$

となり、大きさが等しくなり、そのベクトル和は  $x$  軸に平行になることがわかる。

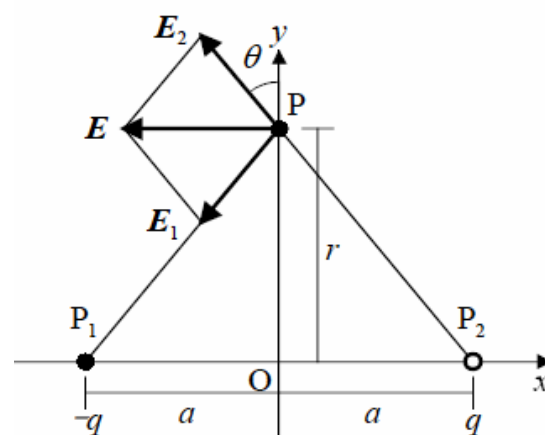
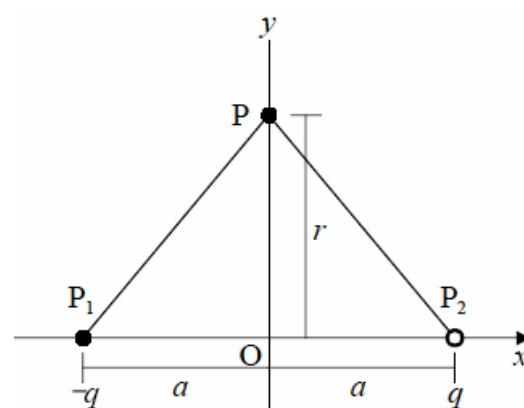
$E_1$  及び  $E_2$  が  $y$  軸となす角を  $\theta$  とすると

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

なので  $E_1$  と  $E_2$  の合計から得られる点  $P$  での電界  $E$  の大きさは

$$\begin{aligned} E &= 2E_1 \sin \theta = 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qa}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

となり、その方向は  $x$  軸に平行な方向となる。



(15) 次の文章中の(a)～(d)に当てはまる言葉を書きなさい。

電界ベクトル  $E$  を連ねていくと一つの曲線が得られる。この曲線を(a)と呼ぶ。ある点  $P$  の電界の大きさが  $E$  であるとする、電気力線は  $P$  を中心とした電界に垂直な単位面積あたり(b)本となるように引く。電気力線には次の性質がある。

(ア)電気力線上の任意の点における接線は(c)と一致する。(イ)電気力線は(d)に始まり、(e)または無限遠点に向かう、あるいは無限遠点から来て(e)で終わる。(ウ)電気力線は互いに(f)ことはない。また、(g)のないところで始まったり終わったりしない。

<<解答>> (a)電気力線 (b) $E$  (c) 電界ベクトル  $E$  (d)正電荷 (e)負電荷 (f)交わる (g)電荷

(16) 真空中に単独にある電荷  $Q$  から出ている電気力線の数求めよ。

<<解答>>  $Q$  の電荷を中心として半径  $r$  の球面を考えれば、その球面上の電界  $E$  はすべての点で等しく

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

である。この電界  $E$  の方向は球面に垂直で外部に向かう。電界が  $E$  であるということは、単位面積当たりの電気力線の本数が  $E$  本であるということで、半径  $r$  の球の表面積  $S$  は  $4\pi r^2$  なので、結果として、電荷  $Q$  から出ている電気力線の本数  $N$  は、

$$N = SE = 4\pi r^2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

となる。

(17) 2 個の点電荷  $Q$ 、 $-2Q$  が距離  $2r$  だけ離れて置かれているとき、次の各点の電界の強さを求めよ。(a)両電荷の中点、(b)電荷  $Q$  の延長上で距離  $r$  離れた点、(c) $-2Q$  の延長上で距離  $r$  離れた点。

<<解答>>各設問において  $Q$  および  $-2Q$  からの電界の大きさをそれぞれ  $E_1$ 、 $E_2$  とし、それぞれの電荷からの距離を  $r_1$ 、 $r_2$  とする。また、 $Q$  から  $-2Q$  の方向を正とする。

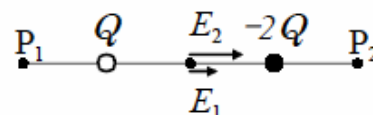
(a)中点での電界の大きさ  $E_1$ 、 $E_2$  はそれぞれ

$r_1 = r$ 、 $r_2 = r$  なので

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2Q}{r^2} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

となり、 $E_1$  と  $E_2$  をあわせた電界の大きさ  $E$  は



$$\begin{aligned}
 E &= E_1 - E_2 \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\
 &= \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}
 \end{aligned}$$

で、その向きは  $Q$  から  $-2Q$  へ向かう向きとなる。

(b)  $P_1$  での電界の大きさ  $E_1$ 、 $E_2$  はそれぞれ

$r_1 = r$ 、 $r_2 = 3r$  なので

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2Q}{r_2^2} = -\frac{1}{18\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

となり、 $E_1$  と  $E_2$  をあわせた電界の大きさ  $E$  は

$$\begin{aligned}
 E &= -E_1 - E_2 \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} + \frac{1}{18\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\
 &= -\frac{7}{36\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}
 \end{aligned}$$

で、その向きは  $-2Q$  から  $Q$  へ向かう向きとなる。

(c)  $P_2$  での電界の大きさ  $E_1$ 、 $E_2$  はそれぞれ

$r_1 = 3r$ 、 $r_2 = r$  なので

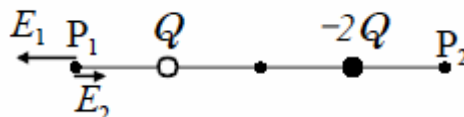
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1^2} = \frac{1}{36\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2Q}{r_2^2} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

となり、 $E_1$  と  $E_2$  をあわせた電界の大きさ  $E$  は

$$\begin{aligned}
 E &= E_1 + E_2 \\
 &= \frac{1}{36\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} - \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\
 &= -\frac{17}{36\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}
 \end{aligned}$$

で、その向きは  $Q$  から  $-2Q$  へ向かう向きとなる。



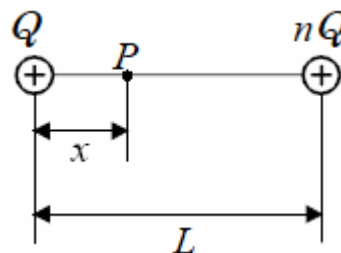
(18)  $Q[\text{C}]$  と  $nQ[\text{C}]$  の 2 個の正電荷を  $L[\text{m}]$  離しておいてある。両電荷を結ぶ線上において、電界  $E$  が 0 になる点  $P$  を求めよ。

<<解答>>電荷  $Q$  による点  $P$  での電界  $E_1$  は

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2}$$

電荷  $nQ$  による点  $P$  での電界  $E_2$  は

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{nQ}{(L-x)^2}$$



となり、 $Q$  と  $nQ$  の間にある点  $P$  では大きさが同じであれば向きが反対なので打ち消しあう。よって

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{nQ}{(L-x)^2}$$

$$nx^2 = (L-x)^2$$

$$(1-n^2) - 2Lx + L^2 = 0$$

$$x = \frac{2L \pm \sqrt{4L^2 - 4L^2(1-n)}}{2(1-n)}$$

$$= \frac{2L \pm \sqrt{4L^2n}}{2(1-n)}$$

$$= \frac{L(1 \pm \sqrt{n})}{1-n}$$

$$= \frac{L(1 \pm \sqrt{n})}{(1+\sqrt{n})(1-\sqrt{n})}$$

$$= \frac{L}{1 \pm \sqrt{n}}$$

ここで、 $0 < x < L$  なので、

$$x = \frac{L}{1 + \sqrt{n}}$$

となる。

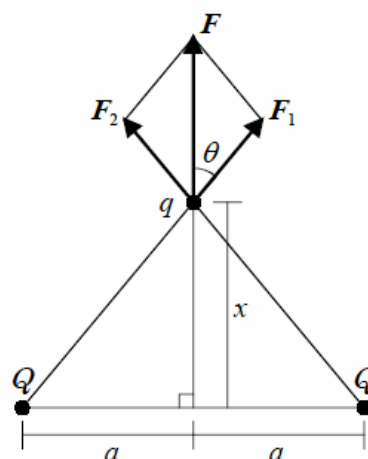
(19) 等量の正電荷  $Q$  を距離  $2a$  だけ離しておき、それらを結ぶ直線の垂直二等分線上に正電荷  $q$  をおく。そのとき、電荷  $q$  に作用する力が最大になる位置はどこか。

<<解答>> 2 個の電荷を結ぶ線から電荷  $q$  までの距離を  $x$  とする. 2 個の電荷  $Q$  から電荷  $q$  に作用する力は、1 個の電荷  $Q$  と電荷

$q$  の距離  $r$  が  $r = \sqrt{a^2 + x^2}$

であるから、それぞれの電荷からの力を  $F_1$ 、 $F_2$  とすると

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2 + x^2}$$



よって、電荷  $q$  に作用する力の大きさ  $F$  は、 $F$  と  $F_1$  のなす角を  $\theta$  とすると

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

なので

$$F = 2F_1 \cos \theta = 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qqx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ここで、 $F$  を最大にするには、 $F$  を  $x$  で微分して 0 とおけばよい。よって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F &= \frac{d}{dx} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qqx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} 2x \times x}{(a^2 + x^2)^3} \right\} \\ &= \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{a^2 + x^2 - 3x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \right\} = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{a^2 - 2x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

となり、 $dF/dx=0$  となるためには、

$$a^2 - 2x^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

となる。その結果、垂直二等分線上の  $x = a/\sqrt{2}$  で最大となる。

(20) 図のように  $x$  軸上に長さ  $2a$  にわたって電荷が一様に線密度  $\lambda$  で分布している。 $x$  軸上

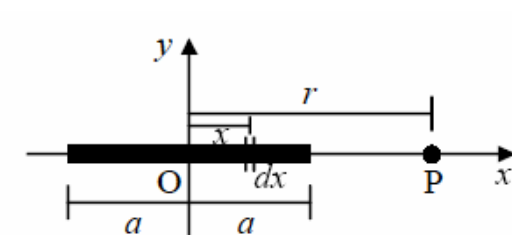
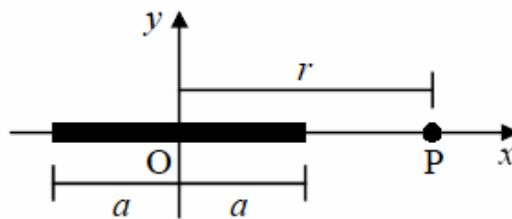
で、原点  $O$  から  $r (r > a)$  だけ離れた点  $P$  での電界を求めよ。

<<解答>>  $x$  軸上の原点から距離  $O$  の位置に微小部分  $dx$  を考えると、この微小部分がもつ電荷  $\lambda dx$  が点  $P$  につくる電界は  $x$  軸の正の向きを向き、その大きさは、

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (r-x)^2}$$

となる。これを区間  $[-a, a]$  積分すると、

$$\begin{aligned} E &= \int_{-a}^a \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (r-x)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx}{(r-x)^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r-x} \right]_{-a}^a = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r-a} - \frac{1}{r+a} \right) \\ &= \frac{a\lambda}{2\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)} \end{aligned}$$



### 第3章 電位・電位差

#### 3. 1 電位

##### 3. 1. 1 定義

ある電荷  $Q$  を考えよう。この電荷は周辺へ

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{n}_r [\text{V/m}] \quad (3.1)$$

の電界を与えている。 $\mathbf{n}_r$  は  $r$  方向の単位ベクトル。この電荷から距離  $r$  の位置に単位電荷 1 を置いたとすれば、この単位電荷 1 には以下のクーロン力が働く。

$$\mathbf{F} = \frac{Q \cdot 1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{n}_r [\text{N}] \quad (3.2)$$

よく考えてみると、単位電荷は突然現れるのでは無く、どこからか運ばれて来ないと電荷不変の法則に反する。このため、単位電荷 1 を無限遠点から  $r$  の位置まで運んできたとすると、運んでくる区間  $r=\infty \sim r$  では常に(3.2)式であたえられる力が働いているから、位置  $r$  まで運ぶのに必要なエネルギーは

$$W = -\int_{\infty}^r \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_r dr = -\int_{\infty}^r \frac{Q \cdot 1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{n}_r dr = \left[ \frac{Q \cdot 1}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{\infty}^r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} [\text{J/C} = \text{V}] \quad (3.3)$$

となる。エネルギーが消費されるから記号 (－) が付いている。エネルギーはスカラー量であるから大きさを持つが方向を持たない。特に単位電荷当たりのエネルギー  $J/C$  を電圧と呼び、これを電位と定義する。

換言すれば、電位（でんい）とは、静電界中にある単位電荷がその点において持つ静電エネルギー（電氣的な位置エネルギー）のことである。すなわちクーロン力によるポテンシャル（静電ポテンシャル）である。単位は一般に  $V$ （ボルト、Volt）を用いる。特に電位差のことを電圧という。電位は  $V = W/Q$  によって求められる。ここで  $V$  は電位（単位は  $V$ ）、 $W$  は仕事（単位は  $J$ ）、 $Q$  は電荷（単位は  $C$ ）を表す。つまり電位の単位  $V$  は  $J/C$  の次元を持つ。

#### 点電荷による電位

点電荷の場合を例にして、電位、電位差、ポテンシャルエネルギー、電界の関係を考えよう。図 3.1 では原点に正電荷が置かれ、テスト粒子を任意の位置に置いたときの運動の様子が表現してある。運動の原因は原点の正電荷が形成する電界である。電位差と運動の関係、電位勾配（すなわち、電界の大きさ）と運動の関係を見てほしい。正電荷をもつ点電荷からは、放射状に外向きの電界が生じる。原点に正電荷があり、周囲の空間に電界を作っているとしよう。

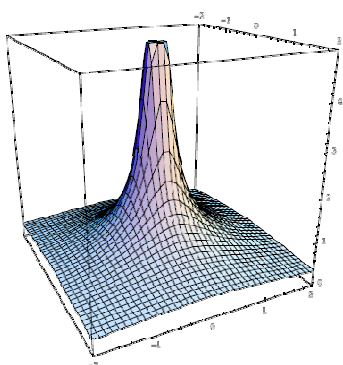


図 3.1 正の点電荷が作る電位の空間分布

この電界中に正電荷  $q_0$  を持つテスト粒子を置くと、粒子は元の点電荷からの位置によって決まる静電気力にもとづくポテンシャルエネルギー  $U$  を得る。テスト粒子を位置  $A$  から  $B$  まで移動するとき、ポテンシャルエネルギーの変化は以下のように表現できる。

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.4)$$

$A$  から  $B$  に移動したとき、テスト粒子が原点の正電荷から離れていくとしよう。テスト粒子は電場に駆動されて運動エネルギーが増す。その分ポテンシャルエネルギーは失われるので、 $\Delta U$  は負の値になる。

(3.4)式の第2項は、テスト粒子のポテンシャルエネルギー変化  $\Delta U$  をテスト粒子の電荷  $q_0$  で割ったものである。これを電位差( $\Delta V = \Delta U/q_0$ )と呼ぶ。

つまり、電位というのは、静電気力にもとづくポテンシャルエネルギーに対応した量である。ポテンシャルエネルギーはあくまでテスト粒子のもつ量である。しかしその原因は原点の正電荷である。そこで、ポテンシャルエネルギーをテスト粒子の電荷  $q_0$  で割ることによって、テスト粒子の性質によらない、原点の電荷だけで決まる量を作る。それが「電位」とも言える。

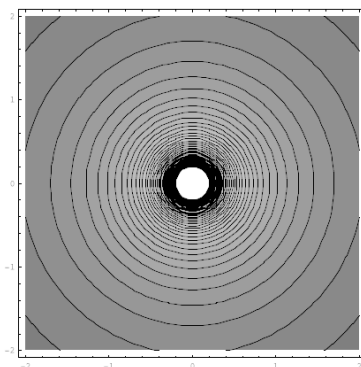


図 3.2 等電位の点をつないだ「等高線」

(3.4)式の第3項を見よう。これはもともと電氣的ポテンシャルエネルギーを定義している項である。つまり、力を距離で積分して仕事を求め、それにマイナスの符号をつけたもの

が、ポテンシャルエネルギーの差に等しいという。これを第2項と比べると、電位と電界との関係がわかる。この関係を書くと、例えば次のようになる。

$$\mathbf{E}_x = -\frac{dV}{dx} \mathbf{i} \quad (3.5)$$

$\mathbf{i}$  は  $x$  方向の単位ベクトル。(3.5)式は電界の  $x$  軸方向のみについて表わしたものであり、「電界とは、電位の空間的な勾配（傾き）の大きさを表わす」ということを意味する。マイナスがついているのは、坂道を登るときは下る方向に力を受けるということと同様である。

以上から点電荷の作る電位は、 $k$  を比例定数として、次のように書ける。

$$V = k \frac{q}{r} \quad (3.6)$$

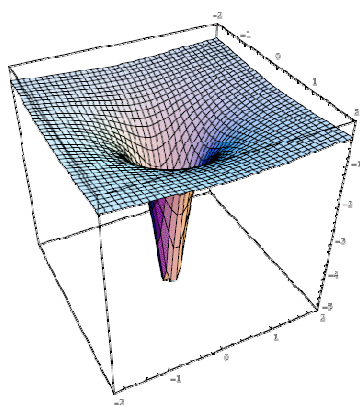


図 3.3 負の点電荷が作る電位の空間分布

**ポテンシャル** でこぼこした地面にボールを置くと、一般にボールは転がっていく。ボールがどちらに転がっていくかは、その場所の等高線入りの地図がわかれば、その場所がどちらに傾いているのかがわかり、ボールがどちらに転がっていくかわかる。

ポテンシャルとは、この等高線入りの地図のようなものである。

**静電界のポテンシャル** 時間的に変化しない電界を静電界という。静電界のポテンシャルが電位である。試験電荷を正の電荷とした場合、正の電荷同士は反発するので、正の試験電荷は他の正の電荷と反発して、負の電荷に向かっていく。この現象を考える場合、空間に固定されている電荷で正の電荷を山の頂上、負の電荷を谷底と考えるとよい。そうすれば試験電荷は山の上から転がり落ちてきて、谷底（穴）に行くという日常的経験とよく一致する。

**電位の求め方** 電荷によって点  $x, y$  に作られる電位  $V$  は（山の高さは）

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} \quad (3.6)$$

で与えられる。ここで  $\epsilon_0$  は真空の誘電率、 $Q$  は電荷（正電荷なら+）、 $r_1$  は点  $x, y$  と点  $x_1, y_1$  との距離である。

二次元なら

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} \quad (3.7)$$

三次元なら

$$r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \quad (3.8)$$

である。(ピタゴラスの定理)

この式をグラフ化すると図 3.4 となる。(  $r=0$  で発散するので、適当なところで打ち切っている。)

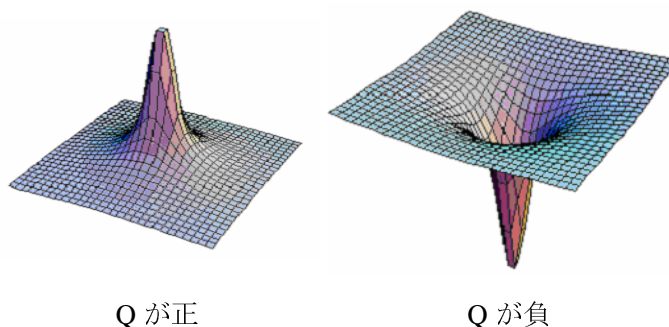


図 3.4 正と負、それぞれの電荷が作る電位分布

二つの電荷が作る電位は、単純にそれぞれの電荷が作る電位を足せばよい。ある点  $x_1, y_1$  に電荷  $Q_1$  が置かれており、ある点  $x_2, y_2$  にも電荷  $Q_2$  が置かれているとすると、点  $x, y$  の電位は

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} \quad (3.9)$$

となる。

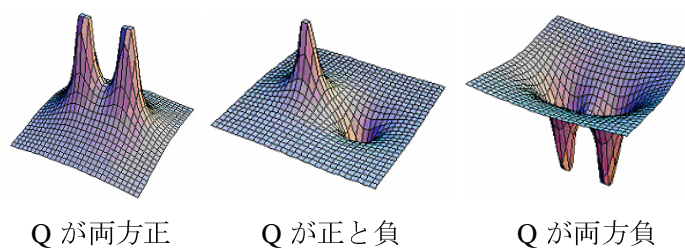


図 3.5 正と負、二つの電荷が作る電位分布

三つ以上の電荷の場合も基本的には同じである。それぞれの電荷が作る電位を足せばよい。

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} \quad (3.10)$$

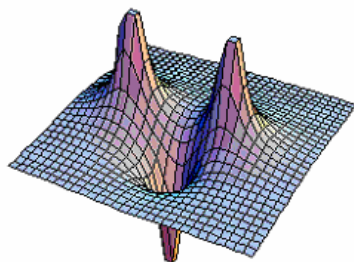


図 3.6 三つの電荷が作る電位分布

**例題 1** 半径  $a$  の球全体に総量  $Q$  の電荷が一様に分布している。球の中心から距離  $r$  の点  $P$  での電位を求めよ。ただし、電位の基準は無有限遠とする。

《解答》中心が同じで半径が  $r$  の球を閉曲面  $S$  と考え、これにガウスの法則を適用する。電界  $E$  は球対称で、その強さは  $r$  の関数となる。電界の向きは常に球面に垂直で、その強さは球面上どこでも等しく、球の表面積は  $4\pi r^2$  なので

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \oint_S ds = E \cdot 4\pi r^2$$

となる。 $r > a$  では閉曲面内に含まれる電荷は  $Q$  なのでガウスの法則より

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

一方、 $r < a$  では球の電荷の体積密度を  $\rho$  とすると

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

となり、球内の半径  $r$  の閉曲面内に含まれる電荷  $Q(r)$  は

$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{4}{3}\pi a^3 \rho = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \\ &= \frac{r^3}{a^3} Q \end{aligned}$$

となるので、ガウスの法則より

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \\ &= \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3} \end{aligned}$$

したがって、電界  $E$  は

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^2} & r < a \end{cases}$$

が求められる。

よって、電位  $\phi$  は  $r > a$  では

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

となり、 $r < a$  では

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^a \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} dr + \int_a^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_r^a + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} (a^2 - r^2 + 2a^2) \\ &= \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^3} (3a^2 - r^2) \end{aligned}$$

となり、

$$\phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2} (3a^2 - r^2) & r < a \end{cases}$$

と求められる。

**例題 2** 半径  $a$  の無限に長い円筒上に電荷が一様に面密度  $\sigma$  で分布している。円筒の中心軸から距離  $r_A$  と  $r_B$  だけ離れた 2 点  $AB$  間の電位差を求めよ。ただし  $r_A < r_B$  とする。

《解答》中心から距離  $r$  離れた場所の電界  $\mathbf{E}$  は無限に長い円筒では対称性を考えると、円筒の外では電界  $\mathbf{E}$  は円筒の側面に垂直に外に向かっている。一方、円筒内では電界は打ち消しあい  $0$  となる。対称性を考慮して、円筒と中心軸が一致して半径が  $r$ 、長さが  $l$  の円柱を閉曲面  $S$  と考え、ガウスの法則を適用する。円筒の上面及び下面では電界ベクトル  $\mathbf{E}$  と面積素片ベクトル  $d\mathbf{S}$  は直交するためにその内積は  $0$  となるため、側面のみを考えればよいことになる。 $r > a$  の場所では電界は  $\mathbf{E}$  でどこでも同じであり、側面積は  $2\pi r l$  なので

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{側面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 2\pi r l$$

となる。 $S$  内の電界の総和は  $2\pi al\sigma$  なので

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= E \cdot 2\pi rl \\ &= \frac{2\pi al\sigma}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

となる。一方、 $r < a$  では電荷は 0 なので

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= E \cdot 2\pi al \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。よって電界  $E$  は

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

と求められる。

よって電位  $\phi$  は  $r_B > r_A > a$  では

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{r_A}^{r_B} \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r} dr \\ &= \frac{\sigma a}{\epsilon_0} [\log r]_{r_A}^{r_B} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} (\log r_B - \log r_A) \\ &= \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_B}{r_A}\end{aligned}$$

となり、 $r_B > a > r_A$  では

$$\begin{aligned}\phi &= \int_a^{r_B} \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} dr + \int_{r_A}^a 0 dr \\ &= \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_B}{a}\end{aligned}$$

となり、 $a > r_B > r_A$  では

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{r_A}^{r_B} 0 dr \\ &= 0\end{aligned}$$

が得られる。

よって

$$\phi = \begin{cases} \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_B}{r_A} & r_B > r_A > a \\ \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_B}{a} & r_B > a > r_A \\ 0 & a > r_B > r_A \end{cases}$$

と求められる。

## 練習問題

(1) 半径  $a$ 、 $b$  の 2 つの球状導体を十分に離して置き、この間を細い導線でつなぐ。これに総量  $Q$  の電荷を与えたときに、両球の電位はどうなるか。また、両球の表面上の電荷密度はどうなるか。

《解答》球の中心  $O$  を中心とする半径  $r$  の球面を閉曲面  $S$  と考え、ガウスの法則を適用する。中心から距離  $r$  離れた場所での電界  $E$  は球対称であり、電界の大きさは  $r$  の関数となる。電界は常に球面に垂直で、その大きさは球面上どこでも等しく、球の表面積は  $4\pi r^2$  なので、

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 4\pi r^2$$

となる。閉曲面  $S$  内の電荷の総量は、 $r > a$  のときは  $Q$ 、 $r < a$  のときは、塊状導体球であるから、導体内で電位差が無く 0 となる。したがってガウスの法則より、 $r > a$  では

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$r < a$  では

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 4\pi r^2 = 0$$

が得られ、電界  $E$  は

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

よって、電位  $\phi$  は  $r > a$  では

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \left[ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_r^\infty \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

となり、 $r < a$  では

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^a 0 dr + \int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

となり、

$$\phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & r < a \end{cases}$$

と求められる。

以上からそれぞれの球状導体の電位を  $\phi_A$ 、 $\phi_B$ 、電荷を  $Q_A$ 、 $Q_B$ 、とすれば、それぞれの球の電位は

$$\phi_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\phi_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

となる。いま、細い導線をつないだため、それぞれの電位は等しくなる。

$$\phi_A = \phi_B = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

それぞれの電荷密度を  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$  とすると

$$\sigma_A = \frac{Q_A}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_B = \frac{Q_B}{4\pi b^2}$$

であり、両球のもつ電荷の総量は  $Q$  なので

$$\begin{aligned} Q &= Q_A + Q_B \\ &= 4\pi\epsilon_0 a\phi + 4\pi\epsilon_0 b\phi \\ &= 4\pi\epsilon_0 \phi(a+b) \end{aligned}$$

よって、電位  $\phi$  は

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(a+b)}$$

と求められる。またそれぞれの球の表面の電荷密度  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$  は

$$\sigma_A = \frac{Q_A}{4\pi a^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 a\phi}{4\pi a^2} = \frac{\epsilon_0 \phi}{a} = \frac{Q}{4\pi a(a+b)}$$

$$\sigma_B = \frac{Q_B}{4\pi b^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 b\phi}{4\pi b^2} = \frac{\epsilon_0 \phi}{b} = \frac{Q}{4\pi b(a+b)}$$

と求められる。

(2) 問題(1)で、両球体が空心導体球である場合、両球の表面での電界を求めて、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

が成り立つことを示せ。

《解答》中心が同じで半径が  $r$  の球を閉曲面  $S$  と考え、これにガウスの法則を適用する。電界  $E$  は球対称で、その強さは  $r$  の関数となる。電界の向きは常に球面に垂直で、その強さは球面上どこでも等しく、球の表面積は  $4\pi r^2$  なので

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \oint_S ds = E \cdot 4\pi r^2$$

となる。 $r > a$  では閉曲面内に含まれる電荷は  $Q$  なのでガウスの法則より

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \oint_S ds = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

一方、 $r < a$  では球の電荷の体積密度を  $\rho$  とすると

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

となり、球内の半径  $r$  の閉曲面内に含まれる電荷  $Q(r)$  は

$$Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{r^3}{a^3} Q$$

となるので、ガウスの法則より

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{Qr^3}{\epsilon_0 a^3}$$

したがって、電界  $E$  は

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \\ \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} & r < a \end{cases}$$

が求められる。

よって、球状導体 A、B の表面の電界  $E_a$ 、 $E_b$  は

$$E_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$E_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}$$

となる。

ここで、電荷密度は

$$\sigma_A = \frac{Q_A}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_B = \frac{Q_B}{4\pi b^2}$$

を用いると、

$$E_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{4\pi a^2 \sigma_A}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\sigma_A}{\epsilon_0}$$

$$E_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{4\pi b^2 \sigma_B}{4\pi\epsilon_0 b^2} = \frac{\sigma_B}{\epsilon_0}$$

が得られる。よって、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

が成り立つ。

(3) 半径  $b$  の同心円状の空洞をもつ半径  $a$  の球状導体がある。中心  $O$  に点電荷  $q$  を置いたとき、空洞の内壁と導体の外側表面上に誘起される電荷の密度、および導体内外の電界と電位を求めよ。

《解答》中心に点電荷があるので、導体内壁には  $-q$  の電荷が誘起され、結果として、外側表面には  $+q$  の電荷が誘起される。それぞれの電荷密度を  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$  とすると

$$\sigma_A = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_B = \frac{q}{4\pi b^2}$$

となる。中心が  $O$  で半径が  $r$  の球を閉曲面と考えてガウスの法則を適用すると、

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & r > a \\ 0 & b < r < a \\ \frac{q}{\epsilon_0} & r < b \end{cases}$$

となる。よって電界  $E$  は

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \\ 0 & b < r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < b \end{cases}$$

となり、電位  $\phi$  は  $r > a$  では

$$\phi = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

となり、 $b < r < a$  では、

$$\phi = \int_r^a 0 dr + \int_a^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

となり、 $r < b$  では

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_b^a 0 dr + \int_a^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

となる。

よって

$$\phi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} & r > a \\ 0 & b < r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{r} \right) & r < b \end{cases}$$

と求められる。

(4) 半径  $a$ 、 $b$ 、 $c$  の球状導体を十分離して置き、これらの間を細い導体でつなぐ。これら全体に総量  $Q$  の電荷を与えたとき、個々の球の電位はどうなるか。また、個々の球の表面上の電荷密度はどうなるか。

《解答》それぞれの導体球の電荷を  $Q_A$ 、 $Q_B$ 、 $Q_C$ 、電荷密度を  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$ 、 $\sigma_C$  とすると、電位  $\phi_A$ 、 $\phi_B$ 、 $\phi_C$  は

$$\phi_A = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$$\phi_B = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b}$$

$$\phi_C = \frac{Q_C}{4\pi\epsilon_0 c}$$

であり、これを細い導線でつなぐと電位は等しくなる。

$$\phi = \phi_A = \phi_B = \phi_C = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q_B}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{Q_C}{4\pi\epsilon_0 c}$$

それぞれの電荷密度は

$$\sigma_A = \frac{Q_A}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_B = \frac{Q_B}{4\pi b^2}$$

$$\sigma_C = \frac{Q_C}{4\pi c^2}$$

であり、3つの球のもつ電荷の総量は  $Q$  なので

$$\begin{aligned} Q &= Q_A + Q_B + Q_C \\ &= 4\pi\epsilon_0 a\phi + 4\pi\epsilon_0 b\phi + 4\pi\epsilon_0 c\phi \\ &= 4\pi\epsilon_0 \phi (a + b + c) \end{aligned}$$

よって、電位  $\phi$  は

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a + b + c)}$$

と求められる。また、それぞれの球の表面の電荷密度は

$$\sigma_A = \frac{Q_A}{4\pi a^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 a\phi}{4\pi a^2} = \frac{\epsilon_0 \phi}{a} = \frac{Q}{4\pi a(a + b + c)}$$

$$\sigma_B = \frac{Q_B}{4\pi b^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 b\phi}{4\pi b^2} = \frac{\epsilon_0 \phi}{b} = \frac{Q}{4\pi b(a + b + c)}$$

$$\sigma_C = \frac{Q_C}{4\pi c^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 c\phi}{4\pi c^2} = \frac{\epsilon_0 \phi}{c} = \frac{Q}{4\pi c(a + b + c)}$$

と求められる。

(5) 問題(3)で導体球を接地した場合について解け。

《解答》導体中の電界が  $0$  になるためには内壁には  $-q$  の電荷が誘起されなくてはならず、また、導体が接地されているということは導体の電位が  $0$  になることを示す。このことから、導体外部の電界も  $0$  にならなくてはならない。よって、外側表面に電荷は存在しないことになる。電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0 & r > b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < b \end{cases}$$

となる。したがって、電位  $\phi$  は  $r > b$  で  $0$  になり、 $r < b$  では

$$\begin{aligned}\phi &= \int_r^b E dr + \int_b^\infty E dr \\ &= \int_r^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_b^\infty 0 dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_r^b = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)\end{aligned}$$

となり、

$$\phi = \begin{cases} 0 & r > b \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & r < b \end{cases}$$

と求められる。

## 第4章 電気力線、誘電体、キャパシタンス

### 4. 1 電気力線

#### 4. 1. 1 電気力線とは

電界の様子を目で見て理解できるように工夫したのが電気力線であり、電気力線は実際に存在する物理的な線ではない。存在を仮定すると説明に便利な量である。電気力線は以下のように定義される。

- 1)電気力線はプラス電荷から湧き出し、
- 2)マイナス電荷に吸収、
- 3)電気力線上の任意の点の接線はその点での電界の方向、
- 4)単位面積を通過する電気力線の本数(電気力線密度)はその場所の電界の強さに等しい。

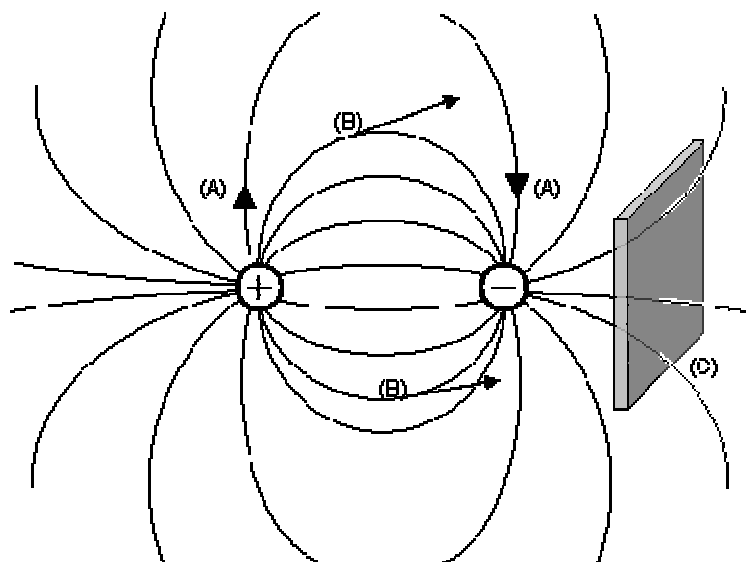


図 4.1 電気力線

以上の定義から以下の性質がわかる。

- 1)電気力線には向きがある、
- 2)電気力線が無限遠点から来ることもある、
- 3)電気力線が無限遠点に向かうこともある、
- 4)電気力線は交差しない、
- 5)電気力線は折れない、
- 6)電気力線は枝分かれない、
- 7)電気力線の密な部分(混雑している部分)は電界が強い、
- 8)電気力線が平行であればそれは一様な電界強度である。

#### 4. 1. 2 電気力線の数

クーロンの法則は以下の式で与えられる。

$$F = \kappa_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (4.1)$$

この式は、「2 つの電荷が及ぼしあう力は、電荷の積に比例し距離の自乗に反比例する」ということを意味する。この比例定数  $\kappa_0$  を次式で与えられるとする。

$$\kappa_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (4.2)$$

ここで、 $\epsilon_0$  を真空の誘電率という。

電気力線の本数と電界の関係を

「単位面積あたりの電気力線の本数(電気力線密度)はその場所の電界の強さに等しい」

とする。

具体的な例として、真空中に存在するプラスの点電荷  $q$  を考えよう。点電荷  $q$  からは電気力線が放射されている。その電気力線の本数を  $N$  とする。点電荷  $q$  から距離  $r$  だけ離れた場所の電界の強さ  $E$  は

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (4.3)$$

となる。

「単位面積あたりの電気力線の本数」(電気力線密度)は、その場所での電界  $E$  と等しいから、点電荷を中心とする半径  $r$  の球の表面積  $S$

$$S = 4\pi r^2 \quad (4.4)$$

を考え、「単位面積あたりの電気力線の本数」に「表面積  $S$ 」をかけると電気力線の全部の本数になる。すなわち、電荷  $q$  から放射される電気力線の本数  $N$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

点電荷  $q$  から放射される電気力線の本数は、電荷量を誘電率で割ったものに等しい。

マイナス電荷の場合は「吸収される電気力線の本数は、電荷量を真空の誘電率  $\epsilon_0$  で割ったものに等しい」となる。真空の誘電率  $\epsilon_0$  を定義することによって、電気力線の本数と電荷が簡潔に関連付けられるのである。

## 4. 2 誘電体

### 4. 2. 1 電束と電束密度

電気力線のうちの「何本か」を束ねたものを電束という。1[C]の電荷からは1本の電束が放射されていると決める。真空中であっても、他の物体中であっても1[C]からは1本が放射される。すなわち、電束は媒質に影響されず、 $q$ [C]の電荷からは $q$ 本の電束が放射される。電荷  $q$  を中心とした半径  $r$  の球の表面積は  $4\pi r^2$  である。電荷  $q$  を表面積  $4\pi r^2$  で割れば、電

荷  $q$  から距離  $r$  離れた場所における「単位面積あたりの電束の数」となる。

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad (4.6)$$

これを電束密度  $D$  という。電荷を面積で割るから、電束密度の単位は  $[\text{C}/\text{m}^2]$  となる。電荷から遠くなるほど、表面積  $4\pi r^2$  が大きくなるから電束密度は小さくなる。

電荷  $q$  から距離  $r$  離れた場所における電界の強さは、「単位面積あたりの電気力線の本数」(電気力線密度)と等しく次式で与えられる。

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{n}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4.7)$$

したがって、 $\mathbf{D}$  を  $\mathbf{E}$  に代入すると、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  となる。電気力線のうちの「何本か」を束ねたものが電束であった。この式を見ると、電気力線を  $\epsilon_0$  本束ねたものが電束となる。換言すれば、電気力線の  $\epsilon_0$  本をまとめると電束になると考えてもよい。電束は、電荷  $q$  を取り囲む物質とは無関係に  $q$  本放出される。当然、電束密度  $D$  も周囲の物質の影響を受けない。単位面積あたりの電気力線(電界  $E$  と等しい)を  $\epsilon_0$  本束ねれば単位面積あたりの電束(電束密度  $D$ )である。

#### 4. 2. 2 分極ベクトル

誘電体では、電子は各原子に属し、電界に対してその電子がわずかに変位する。このように電荷がわずかに変位する現象を分極(polarization)とよぶ。誘電体は分極しうる分子の集合であり、分極によりできた電荷を分極電荷(polarization charge)という。分極した分子は双極子モーメント(dipole moment) $\mathbf{p}$  をもつ。単位体積あたりの双極子モーメント  $\mathbf{P}$  を誘電分極(dielectric polarization)または単に分極ベクトル(polarization vector)とも言う。

単位体積あたりの分子数を  $n$  とすれば、分極ベクトルは

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\mathbf{l}Q \quad (4.8)$$

と書ける。ここで、 $Q$  は電荷であり、 $\mathbf{l}$  は  $-Q$  から  $Q$  に向かう位置ベクトルである。分極ベクトル  $\mathbf{P}$  の大きさは分極方向に直角な断面に現れる分極電荷の表面密度とも解釈でき、面の法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とすれば、表面密度  $\sigma_p$  は

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (4.9)$$

である。

分極ベクトル  $\mathbf{P}$  は実験によると電界  $\mathbf{E}$  に比例する。すなわち

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (4.10)$$

であり、 $\chi_e$  は電気感受率(electric susceptibility)と呼ばれる。

#### 4. 2. 3 誘電率

誘電体中の電束密度 (electric displacement)  $\mathbf{D}$  は、分極ベクトル  $\mathbf{P}$  を用いて次式で表される。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.11)$$

ここで、 $\epsilon_0$  を真空の誘電率、 $\mathbf{D}$  を電束密度、 $\mathbf{E}$  を電界、 $\mathbf{P}$  を分極ベクトルとする。多くの物質では、分極  $\mathbf{P}$  は電界  $\mathbf{E}$  に比例するとみなすことができ、 $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$  がなりたつから、

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} \quad (4.12)$$

となる。ここで  $\epsilon_r \equiv 1 + \chi_e$ 、 $\epsilon \equiv \epsilon_r \epsilon_0$  とおくと

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.13)$$

となる。

ここで、 $\chi_e$ を電気感受率、 $\epsilon_r$ を比誘電率、 $\epsilon$ を誘電率である。これは材料中では真空中の誘電率  $\epsilon_0$ の代わりに誘電率  $\epsilon \equiv \epsilon_r \epsilon_0$ を考えればよいことを意味する。比誘電率  $\epsilon_r$ は無次元量であり、用いる単位系によらず一定の値をとる。

主な物質の比誘電率を表 4.1 に示す。

表 4.1 物質の比誘電率		
物質名	比誘電率	備考 (温度依存性、周波数依存性)
水	80.4	20°C (温度によって大きく変化する)
アルコール	16~31	
ダイヤモンド	5.68	20°C、500~3000Hz
ガラス	5.4~9.9	
アルミナ (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	8.5	
木材	2.5~7.7	
雲母	7.0	常温
イオウ	3.6~4.2	
石英 (SiO <sub>2</sub> )	3.8	
ゴム	2.0~3.5	
アスファルト	2.7	
紙	2.0~2.6	
パラフィン	2.1~2.5	
空気	1.00059	

## 4. 3 キャパシタンス

### 4. 3. 1 定義

静電容量は単位電圧あたりに蓄えられる電荷と定義される。記号は  $C$ 、単位はファラド [Farad F] を用いる。ある物体に 1 ボルトの電圧を与えたとき、1 クーロンの電荷を蓄えたならば、その物体の静電容量は 1 ファラドである。1[F]という静電容量は非常に大きな

ものである。通常、我々の周囲で用いられる電子部品としてのキャパシタでは、1[F]の100万分の1 ( $10^{-6}$ ) のマイクロファラド [ $\mu\text{F}$ ] や、1兆分の1 ( $10^{-12}$ ) のピコファラド [ $\text{pF}$ ] が多く用いられる。

#### 4. 3. 2 導体の静電容量

電位は電荷の分布形態と  $\epsilon_0$  に依存している。電荷の分布形態は、電荷が貯まる装置の幾何学的形状であるから、比例定数を  $C$  とすれば、電荷 =  $C \times$  電位、すなわち、

$$Q = CV \quad (4.14)$$

と置くことにし、この  $C$  を静電容量 (electrical capacitance) と呼び、電荷を蓄積することを目的とした装置をキャパシタ蓄電器(capacitor)という。

##### 平行板キャパシタ

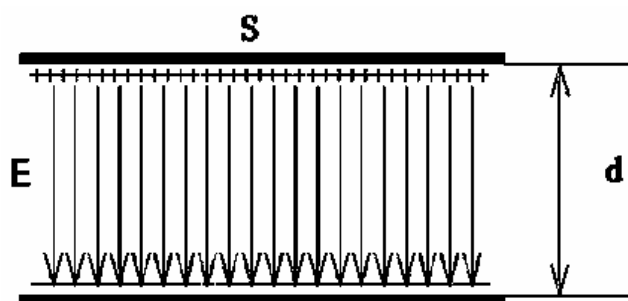


図 4.2 平行平板キャパシタ

図 4.2 のように、面積  $S$  の電極が、間隔  $d$  で二枚平行に対向しているような構造のキャパシタのことを平行平板キャパシタという。いま、上下の電極に電池をつなぐと、両電極に図 4.2 に示すように+と-の電荷が等しく分配される。こうして分配された電荷の面電荷密度を  $\sigma[\text{C}/\text{m}^2]$  とすると、両電極間の電界は、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4.15)$$

となる。極間間隔を  $d$  とすれば、板間の電圧は、

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (4.16)$$

であるから、

$$Q = CV = \sigma S \quad (4.17)$$

よって、

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (4.18)$$

となる。

このように、平行平板キャパシタでは、間隔  $d$  が小さくて、面積  $S$  が大きい電極を作れば大容量のキャパシタを作ることができる。

##### 同軸円筒キャパシタ

つぎに、図 4.3 のような全長が  $l$  の同軸円筒状のキャパシタの静電容量を計算する。

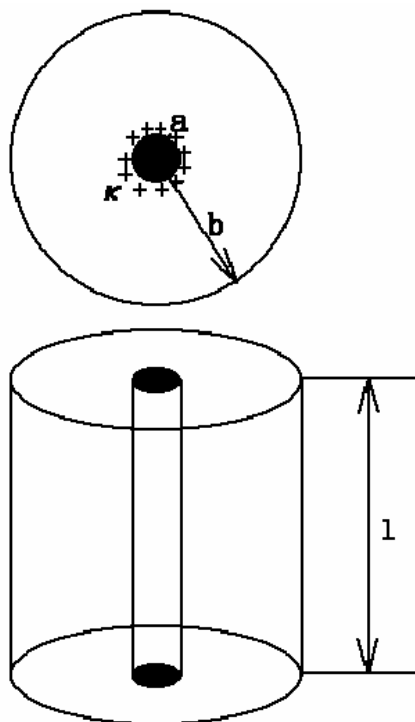


図 4.3 同軸円筒キャパシタ

中心導体上の電荷の単位長さあたり電荷量を  $\kappa[\text{C/m}]$  と仮定する。これによって生ずる電界は、

$$E = \frac{\kappa}{2\pi r} \quad (4.19)$$

であり、中心導体と外部導体間の電圧は、

$$V = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} [\log r]_a^b = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a} = \frac{Q}{C} \equiv \frac{\kappa l}{C} \quad (4.20)$$

であるから、中心導体と外部導体間の電圧は、

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log \frac{b}{a}} \quad (4.21)$$

となる。このように、同軸の長さが長ければ長いほど、また、 $a$  と  $b$  の長さが近ければ近いほど（つまり内外導体の間隔が狭ければ狭いほど）高い静電容量を持つことが分かる。

#### 地球の静電容量

今度は、半径  $r$  の球状導体のキャパシタンスを求めてみよう。この表面に総量  $Q[\text{C}]$  の電荷が載せられているとする。その電位差は無限遠点を基準にしたとき、

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.22)$$

となる。よってキャパシタンス  $C$  は、

$$C = 4\pi\epsilon_0 r \quad (4.23)$$

となる。いま、 $r=6400\text{km}$  の地球の半径を代入して計算すると、

$$C = 4 \times 3.14159 \times 8.85 \times 10^{12} \times 6400 \times 10^3 = 7.12 \times 10^{-3} \quad (4.24)$$

となる。したがって地球の静電容量は  $0.00712[\text{F}]$  しか無いことがわかる。これからわかるように、キャパシタの実用単位系である  $[\text{F}=\text{ファラッド}]$  は、実に大きな単位であってあまり現実的でない。このため、通常、ファラッドの 100 万分の 1 のマイクロファラッド  $[\mu\text{F}]$  やマイクロファラッドの 100 万分の 1 であるピコファラッド  $[\text{pF}]$  が使われる。

#### 4.3.3 静電容量の接続

電気工学ではキャパシタは電気回路を構成する重要な素子である。その回路記号を図 4.4 に示す。

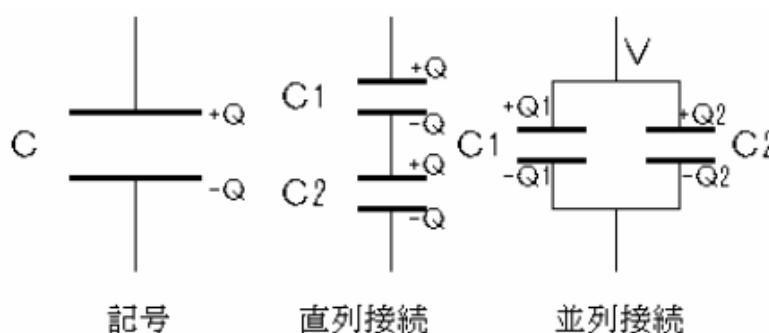


図 4.4 キャパシタの接続方法

##### 静電容量の並列接続

静電容量の並列接続を行った場合、その合成静電容量  $C$  は、各静電容量  $C_i$   $[\text{F}]$  に対しそれぞれ等しい全電圧  $V$   $[\text{V}]$  がかかるため、そのときの電荷を  $Q$   $[\text{C}]$  とすると、次のようになる。

$$C = \frac{Q}{C} = \frac{V \sum_{i=1}^n C_i}{V} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (4.25)$$

合成静電容量は各静電容量の総和に等しい。

##### 静電容量の直列接続

静電容量の直列接続を行った場合、全体に  $V$   $[\text{V}]$  の電圧をかけ、そのときの各素子間に電荷が流れ込まないため電荷が等しくなるのでそれを  $Q$   $[\text{C}]$  とする。その合成静電容量  $C$   $[\text{F}]$  は、各静電容量  $C_i$   $[\text{F}]$  に電圧  $V_i$   $[\text{V}]$  がかけるとすると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 V_i &= \frac{Q}{C_i}, \\
 V &= \sum_{i=1}^n V_i = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \\
 C &= \frac{Q}{V} = \frac{Q}{Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}, \quad (4.26) \\
 \frac{1}{C} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}
 \end{aligned}$$

合成静電容量は、各静電容量の逆数の総和の逆数に等しい。また、各静電容量の電圧分担は次のようになる。

$$V_i = \frac{Q}{C_i} = \frac{C}{C_i} V \quad (4.27)$$

静電容量の逆数をエラスタンス (elastance) という。単位は毎ファラド ( $\text{F}^{-1}$ )である。

## 練習問題

(1) 次の文章中の a ~ i に当てはまる言葉を書きなさい。または、(A) ~ (F) に数式を書きなさい。 **注) ある面を貫く電気力線の本数のことを電気力束(flux of electric force) として定義する。**

## 電気力束

点電荷  $q$  によってつくられる電界  $E$  の中に任意の曲面  $S$  をとる。このとき曲面  $S$  を通過する電気力線の **a** を、 $S$  を通過する **b** という。

## 閉曲面が球の場合

いま、電荷  $q$  を中心とする半径  $r$  の球面を考えてみよう。球面  $S$  上での電界  $E$  はどこでも球面に垂直で、その大きさ  $E$  は

$$E = (A) \quad (1)$$

である。電気力線は電界に垂直な単位面積あたり **c** 本となるように引かれているので、式(1)の  $E$  は球面  $S$  上の単位面積を通過する **b** でもある。したがって球面  $S$  を内から外に通過する全電気力束  $\Phi$  は

$$E = (A) \times (B) \quad (2)$$

となる。ここで  $\Phi > 0$  と  $\Phi < 0$  はそれぞれ電気力線が球面  $S$  を **d**、および外から内に貫いていることを意味する。

## 任意の閉曲面の場合

今度は、点電荷  $q$  によってつくられる電界  $E$  の中に任意の閉曲面  $S$  をとってみよう。まず、 $q$  が閉曲面に含まれる場合から考える。この場合には、点電荷から出た **e** は全て閉曲面  $S$  を内から外に通過する。したがって、閉曲面  $S$  を内から外に通過する全電気力束  $\Phi$  は、閉曲面の形によらず常に

$$\Phi = (C) \quad (3)$$

である。

## 閉曲面に点電荷が含まれる場合

次はこの電気力束  $\Phi$  を閉曲面  $S$  上の電界  $E$  を用いて表してみよう。閉曲面  $S$  を微小な **f** に分割し、 $i$  番目の微小面積を  $\Delta S_i$  とする。大きさが微小面積  $\Delta S_i$  と同じで方向がこれに垂直であり、閉曲面を内から外に向かうようにとったベクトルを  $\Delta S_i$  とする。微小面積  $\Delta S_i$  内では電界は一定であるとし、そこでの電界ベクトルを  $E_i$  とする。微小面積  $\Delta S_i$  では、単位面積当たり  $E_i$  本の電気力線が法線( $\Delta S_i$  の向き)と角度  $\theta_i$  をなして内から外に通過するので、微小面積  $\Delta S_i$  を通過する電気力束  $\Delta \Phi$  は

$$\Delta \Phi_i = E_i \Delta S_i \cos \theta_i = (D) \quad (4)$$

で与えられる。これを全ての  $\Delta S_i$  について **g** と、全電気力束  $\Phi$  は

$$\Phi = \sum_i \Delta \Phi_i = \sum_i \Delta E \cdot \Delta S_i \quad (5)$$

となる。ここで、 $\Delta S_i$  の大きさを無限に **h** すると、これを加え合わせたものは実際の閉曲面  $S$  に一致する。このとき  $\Phi$  は

E  
へ訂正

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (6)$$

で書き表される。このような積分を「 $\oint$ 」という。ここで  $d\mathbf{S}$  は面素片ベクトルという。記号「 $\oint$ 」は閉曲面  $S$  全てにわたって積分を行うことを表す。式(6)で表される全電気力束  $\Phi$  は、式(3)の  $\Phi$  と等しいので、

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = (E) \quad (7)$$

という関係が得られる。

閉曲面に点電荷が含まれない場合

次に閉曲面が点電荷  $q$  を含まない場合を考えてみよう。点電荷  $q$  から放射状に出た電気力線の一部は  $S$  上の  $q$  に面した微小面積  $\Delta S_i$  で  $S$  内に入り、反対側の微小面積  $\Delta S_j$  から外に出る。したがって、微小面積  $\Delta S_i$  と  $\Delta S_j$  を内から外に通過する電気力束をそれぞれ  $\Delta\Phi_i$ 、 $\Delta\Phi_j$  とすると、 $\Delta\Phi_i$  は負で  $\Delta\Phi_j$  は正であり、これらの間には、

$$\Delta\Phi_i = -\mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{S}_i = \mathbf{E}_j \cdot \Delta\mathbf{S}_j = -\Phi_i \quad (8)$$

の関係がある。これから、微小面積  $\Delta S_i$  と  $\Delta S_j$  を内から外に通過する電気力束の和は 0 となる。このことから、点電荷  $q$  が閉曲面  $S$  に含まれない場合には、閉曲面  $S$  を内から外に通過する電気力束の総和は 0 であることがわかる。これを式で表せば、

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = (F) \quad (9)$$

式(7)と式(9)をまとめると

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & (S \text{ が } q \text{ を含むとき}) \\ 0 & (S \text{ が } q \text{ を含まないとき}) \end{cases} \quad (10)$$

となる。これが点電荷 1 個の場合のガウスの法則である。

《解答》

- |          |        |       |
|----------|--------|-------|
| a 総本数    | b 電気力束 | c E   |
| d 内から外   | e 電気力束 | f 面積  |
| g 加え合わせる | h 小さく  | i 面積分 |

$$(A) \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (B) 4\pi r^2 \quad (C) \frac{q}{\epsilon_0} \quad (D) \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}_i \quad (E) \frac{q}{\epsilon_0} \quad (F) 0$$

(2) 次の文章中の a ～ c に当てはまる言葉を書きなさい。

任意の「a」を通して出ていく「b」の数は、その「a」内に含まれる全「c」を  $\epsilon_0$  で割ったものに等しく、「a」の外にある「c」には依存しない。これをガウスの法則と呼ぶ。

《解答》 a 閉曲面 b 電気力線 c 電荷

(3) 半径  $a$  の無限に長い円筒上に電荷が一様に面密度  $\sigma$  で分布している。円筒の中心軸から距離  $r_A$  と  $r_B$  だけ離れた 2 点 AB 間の電位差を求めよ。ただし  $r_A < r_B$  とする。

《解答》無限に長い円筒では、対称性を考えると、円筒の外では電界  $\mathbf{E}$  は円筒の側面に垂直に外に向かっている。一方、円筒内では電界は打ち消しあい  $\mathbf{0}$  となる。対称性を考慮して、円筒と中心軸が一致して半径が  $r$ 、長さが  $l$  の円柱を閉曲面  $S$  と考え、ガウスの法則を適用する。円筒の上面及び下面では電界ベクトル  $\mathbf{E}$  と面積素片ベクトル  $d\mathbf{S}$  は直交するためにその内積は  $\mathbf{0}$  となるため、側面のみを考えればよいことになる。 $r > a$  の場所では電界は  $\mathbf{E}$  でどこでも同じであり、側面積は  $2\pi r l$  なので

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{側面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot 2\pi r l$$

となる。 $S$  内の電界の総和は  $2\pi a l \sigma$  なので

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot 2\pi r l = \frac{2\pi a l \sigma}{\epsilon_0}$$

となる。一方、 $r < a$  では電荷は  $\mathbf{0}$  なので

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot 2\pi r l = 0$$

となる。よって電界  $\mathbf{E}$  は

$$E = \begin{cases} \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} & r > a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

となる。よって電位  $\phi$  は  $r_B > r_A > a$  では

$$\phi = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r} dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} [\log r]_{r_A}^{r_B} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} (\log r_B - \log r_A) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_B}{r_A}$$

となり、 $r_B > a > r_A$  では

$$\phi = \int_a^{r_B} \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} dr + \int_{r_A}^a 0 dr = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_B}{a}$$

となり、 $a > r_B > r_A$  では

$$\phi = \int_{r_A}^{r_B} 0 dr = 0$$

が得られる。よって

$$\phi = \begin{cases} \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_b}{r_A} & r_b > r_A > a \\ \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \log \frac{r_b}{a} & r_b > a > r_A \\ 0 & a > r_b > r_A \end{cases}$$

(4) 半径  $b$  の同心円状の空洞をもつ半径  $a$  の球状導体がある。中心  $O$  に点電荷  $q$  を置いたとき、空洞の内壁と導体の外側表面上に誘起される電荷の密度、および導体内外の電界と電位を求めよ。

《解答》中心に点電荷があるので、導体内壁には  $-q$  の電荷が誘起され、結果として、外側表面には  $q$  の電荷が誘起される。それぞれの電荷密度を  $\sigma_A$ 、 $\sigma_B$  とすると

$$\sigma_A = \frac{-q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_B = \frac{q}{4\pi b^2}$$

となる。中心が  $O$  で半径が  $r$  の球を閉曲面と考えてガウスの法則を適用すると、

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_r 4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & r > a \\ 0 & b < r < a \\ \frac{q}{\epsilon_0} & r < b \end{cases}$$

となる。よって電界  $E$  は

$$E = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \\ 0 & b < r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r < b \end{cases}$$

となり、電位  $\phi$  は  $r > a$  では

$$\phi = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

となり、 $b > r > a$  では、

$$\phi = \int_r^a 0 dr + \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

となり、 $r < b$  では

$$\phi = \int_r^b \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_b^a 0 dr + \int_a^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{r} \right)$$

となる。よって

$$\phi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} & b < r < a \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{r} \right) & r < b \end{cases}$$

と求められる。

(5) 面積  $S$  の板状導体を 2 枚平行に配置した平行板キャパシタの電気容量を求めよ。

ただし、導体間の間隔  $d$  は板の大きさに比べて十分小さく、電界は板に挟まれた空間のみに存在する。

《解答》面積  $S$  の板状導体にそれぞれ  $Q$ 、 $-Q$  の電荷を与えると、板間の外では 2 個の導体がつくる電界は打ち消しあい、導体間のみに電界が存在することになる。電界の大きさを  $E$  とし、それぞれの導体の電荷密度を  $\sigma$ 、 $-\sigma$  とすると

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

となる。

電位差  $\Delta\phi$  は

$$\Delta\phi = Ed = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

で与えられる。電荷密度は  $SQ = \sigma$  で表されるので、電位差は

$$\Delta\phi = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}$$

が得られる。これから電気容量  $C$  は

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon_0 S}} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

(6) 半径  $a$  の導体球とこれを囲む内半径  $b$  の中心が同じ球殻導体からなるキャパシタの電気容量を求めよ。

《解答》内部の導体球と外側の導体球殻にそれぞれ  $Q$ 、 $-Q$  の電荷を与えると、導体間の空間の電界  $E$  は中心からの距離を  $r$  として

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

と表される。これから導体間の電位差は

$$\Delta\phi = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

となる。したがって電気容量は

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

(7) 半径  $a$ 、長さ  $l$  の円柱状導体と長さと同じで内半径  $b$  の円筒状導体とを中心軸が一致するように配置して作ったキャパシタの電気容量を求めよ。ただし、導体間の間隔  $b-a$  は胴体の長さ  $l$  に比べて十分小さく、電界は導体に挟まれた空間のみに存在するとする。

《解答》内側の円柱状導体と外側の円筒状導体にそれぞれ単位長さ当たり  $\lambda$ 、 $-\lambda$  の電荷を与えると、導体にはさまれた空間の電界は中心軸からの距離を  $r$  として、

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

となる。これから導体間の電位差  $\Delta\phi$  は

$$\Delta\phi = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}$$

となる。よって、電気容量  $C$  は

$$C = \frac{Q}{\Delta\phi} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{b}{a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\log \frac{b}{a}}$$

(8) 真空中におかれた半径  $R$  の導体球に電荷  $Q$  を与えたときの静電容量を求めよ。

《解答》導体球と中心が同じで、半径が  $R$  の球面を閉曲面と考えて、ガウスの法則を適用する。閉曲面内に含まれる電荷は  $Q$  であり、閉曲面の面積は  $4\pi R^2$  なので

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

よって電界  $E$  は

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

となる。これから、電位  $\phi$  は

$$\phi = \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

となる。静電容量  $C$  は  $Q/\phi=C$  で求められるので、

$$C = \frac{Q}{\phi} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

となり、よって静電容量  $C$  は

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

(9) 面積  $S$ 、間隔  $d$  の平行板キャパシタの一方の極板に電荷  $Q$  を与える。電極の間に、面積が同じで厚さが  $t$  の板状導体を極板に平行に入れると、全体の電気容量はどうか。

《解答》上の電極と板状導体の間隔を  $d_1$ 、下の極板と板状導体の間隔を  $d_2$  とする。板状導体を入れたら全体としての電気容量が  $C_1=\epsilon S/d_1$  と  $C_2=\epsilon S/d_2$  の2個のキャパシタを直列に接続したものと同じくなる。したがって、全体の電気容量  $C$  は

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

の関係から

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon \frac{S}{d_1} \epsilon \frac{S}{d_2}}{\epsilon \frac{S}{d_1} + \epsilon \frac{S}{d_2}} = \epsilon \frac{S}{d_1 + d_2} = \epsilon \frac{S}{d - t}$$

(10) 外側が半径  $a$  の球面で内側に中心が同じ半径  $b(<a)$  の空洞をもった導体  $A$  と、半径  $c(<b)$  の球状導体  $B$  とが、中心  $O$  が同じになるように置いてある。以下の問に答えよ。

(a) 導体  $B$  に電荷  $Q$  を与え、導体  $A$  には電荷を与えないとき、導体  $A$  の内壁に現れる電荷の総量  $Q_1$  と外側の表面に現れる電荷の総量  $Q_2$  を求めよ。

《解答》(a) 導体  $B$  に電荷  $Q$  が与えられると導体  $A$  の内壁には  $-Q$  の電荷が現れ、導体  $A$  の外側には  $Q$  の電荷が現れる。したがって

$$Q_1 = -Q$$

$$Q_2 = Q$$

(b) 中心  $O$  から距離  $r$  の位置における電界と電位を、 $r>a$ 、 $a>r>b$ 、 $b>r>c$ 、 $r<c$  の4 ケースに分けて求めよ。

《解答》 $r>a$  及び  $b>r>c$  では電界は存在するが、 $a>r>b$  および  $r<c$  では導体中であるために電界は存在しない。よって、それぞれの電界は

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > a \\ 0 & b < r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & c < r < b \\ 0 & r < c \end{cases}$$

と求められる.

また、それぞれの電位  $\phi$  は、 $r > a$  では

$$\phi = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$a > r > b$  では

$$\phi = \int_r^a 0 dr + \int_a^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

$b > r > c$  では

$$\phi = \int_r^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_b^a 0 dr + \int_a^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right)$$

$r < c$  では

$$\begin{aligned} \phi &= \int_r^c 0 dr + \int_c^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr + \int_b^a 0 dr + \int_a^{\infty} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

となるので

$$\phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & a > r > b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) & b > r > c \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) & r < c \end{cases}$$

と求められる.

(c) 導体  $B$  に電荷  $Q$  を与え、導体  $A$  には電荷  $-Q$  を与えたとき、導体  $A$  の内壁に現れる電荷の総量  $Q_1$  と外側の表面に現れる電荷の総量  $Q_2$  を求めよ。

《解答》導体  $B$  に電荷  $Q$  を与え、導体  $A$  には電荷  $-Q$  を与えたとき、導体  $A$  の内壁には電荷  $-Q$  が現れ、導体  $A$  の外側には電荷は現れない。よって

$$Q_1 = -Q$$

$$Q_2 = Q$$

となる。

(d) 導体  $A$  と  $B$  の組を一つのキャパシタと見なしたとき、その電気容量を求めよ。

《解答》電気容量  $C$  は

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{bc}{b-c}$$

となる。

## 第5章 電流、変位電流、電界エネルギー

### 5. 1 電流・変位電流

#### 5. 1. 1 電流とは

ある面を電荷が通過することを電流が流れるという。電荷の単位はクーロン(Coulomb)であるから、単位時間に電荷が通過する割合、すなわち、クーロン/秒の単位で与えられる量を電流 (Ampere) という。

電流は周波数もしくはある面を通過する電荷の変化率で大きく3種類に分類できる。ある面を通過する電荷の時間変化率が一定である場合、すなわち、電荷が時間の1次関数で与える場合、この電流を直流という。

ある面を通過する電荷が時間に対して周期的に変化する場合、この電流を交流という。とくに正弦波状に時間に対して変化する場合を正弦波交流といい、人工的な交流は大部分が正弦波交流である。これらの電流を伝導電流(Conductive Current)という。

交流は導体のみならず非導体である絶縁物中を見かけ上、流れる場合があり、この電流を変位電流(Displacement Current)という。絶縁物を挟んでキャパシタの電極があり、一方が正の電荷に帯電すると他方の電極に負の電荷が誘導される。一方の電極の電荷が正から負へ帯電すると他方の電極には負から正の電荷が誘導される。したがって、一方の電極の電荷の時間的变化が他方へ電荷の極性を反転させて伝わることになり、このようにして絶縁物中を流れる電流を変位電流と呼び、変位電流の大きさは電荷の時間変化率、すなわち、周波数が高いほど大きな電流となる。

電流はある面を通過する電荷の時間変化率によって、直流と交流へ分けられるが、交流は周波数によって性質が変わり、周波数が高くなると絶縁体中を見かけ上ながれる変位電流となる。これは、直流と低周波交流は電気良導体中を流れるのに対し、変位電流は絶縁体中を流れるともみなされるから、電流は導電電流と変位電流とわける場合もある。

#### 5. 1. 2 導電電流

電流(でんりゅう)は、荷電粒子(通常は電子であるが正孔・イオンの場合もある)の移動に伴う電荷の流れ、もしくはある面を単位時間に通過する電荷の量のことである。狭義には、電位差によって引き起こされる荷電粒子の流れのことを言う。電子の流れと逆向きが電流の向きと定義されている。電流の大きさの国際単位系での単位はアンペア(A)で与えられる。アンペアはSI基本単位の一つである。量を表す記号は  $I$  が一般的である。

時間的に変化しない電流を直流電流(直流)、向きが時間的に変化する電流を交流電流(交流)と呼ぶ。交流の電流値を表す方法としては、通常実効値が使われる。

多くの物質では、電流があまり急激に変化しない場合にオームの法則: 電圧=電流×電気抵抗<sub>が</sub>成り立つ。純粋な抵抗負荷を使用し、電圧・電流を実効値で表した場合には、この式は交流でも成立する。物質に電流が流れると、物質の電気抵抗によって熱(ジュール熱)が発生する。オームの法則が成り立つ場合、単位時間にジュール熱として消費されるエネルギーは電流の2乗と抵抗値に比例する。

遠方の発電所から電力を送電する場合には、電力がジュール熱として消費され、エネルギーのロスが生ずる。同じ電力の送電でも、電圧を上げると電流を減らすことができるので、送電時のエネルギーのロスを減らすことができる。遠距離の送電時には高い電圧を使い、各家庭・事業所の近くで使いやすいレベルまで変圧器で電圧を下げるといったことが容易にできるのが、商用の電力に交流が使われる理由である。

**電流戦争** 電流戦争とは、アメリカにおいて、1880年代後半の電力事業の黎明期に、送電システムの違いにより、ジョージ・ウェスティングハウス・ニコラ・テスラ陣営とトーマス・エジソンとの間に発生した確執、敵対関係のことを言う。エジソンが直流送電（DC）を提案したのに対して、ウェスティングハウスとニコラ・テスラが交流送電（AC）を主張した。この争いにはいくつかの背景がある。エジソンは完全無欠な実験者であったが数学者ではなかった。交流送電は、テスラが持っていたような相当高度な数学的物理学に対する適応力なしでは理解し開発することができない。テスラがエジソンのもとで働いていたことがあるため、悪い印象を受けることがあるが、エジソンは約束されたボーナスをテスラからだまし取ったという調査報告がある（テスラの伝記を参照）。電力事業の最初の数年間、エジソンの直流送電はアメリカの標準であった。直流はモータと同様に当時の主要な電力需要であった白熱灯にも適当な送電方式である。エジソンは直流送電から得られる特許使用料を手放すつもりはなかった。しかし、テスラは自身の回転磁界の研究から交流電力の発電、送電、使用のシステムを考案した。さらに、このシステムを商業化するためにジョージ・ウェスティングハウスと契約を結んだ。ウェスティングハウスは、以前にテスラが多相システムの特許と Lucien Gaulard およびジョン・ディクソン・ギブズから AC 変圧器のための他の特許権を買っていた。低周波（50—60Hz）の交流は、電圧の変動によって心臓の拍動リズムを狂わせ、急速に死につながる心室細動などを引き起こす場合があるので、同レベルの直流より危険になりうる。一方、高電圧の直流は、筋肉を固着させる傾向があり、犠牲者が導体から離れるのを妨げるにより、交流より危険になりうる。しかしながら、実際に用いられる送配電のシステムは直流にせよ交流にせよ危険な電流が流れるに十分な電圧を用いることになる。感電死に対する危険は類似しているので、結局、交流送電の利点はこの危険より重要と考えられ、交流送電が世界の標準となった。交流の利点は、変圧器を用いた電圧の変換が容易である事である。電線自体の抵抗によって送電する電流の減衰はやむを得ない事であるが、電圧をより高くすれば減衰は抑えられ、効率が良い。そのため発電所からの送電は高電圧で行われ、家庭に配電する直前に家庭用として使われる電圧にまで下げられる。

### 5. 1. 3 変位電流

変位電流（へんいでんりゅう）とは電束電流（でんそくでんりゅう）とも言い、次の式で表せる。

$$I = \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D}_n \cdot d\mathbf{s} \quad (5.1)$$

電束密度  $\mathbf{D}$  の、閉曲面  $S$  における法線成分の面積分が時間的に変位し発生する電流。電流により、磁界が発生するが、変位電流は具体的に電荷の移動に伴って発生するものではないので、「変位」という名称が付けられている。単位は同じくクーロン毎秒である。

ジェームズ・クラーク・マクスウェルが、電磁気に関する第三論文「電磁場の動力的

理論」で初めて導入し、著書『電気磁気論』にも記したものの。この変位電流の導入によって、マクスウェルの方程式は完成し、そこから電磁波や光速度が導かれることになった。

#### 5. 1. 4 電流と電子の速度

電流は電荷の移動であり、その大きさは単位時間にある断面を通り抜ける電荷量として表される。では、電子の移動速度はどのぐらいなのだろうか。実際の電子の速度は通常半導体でも秒速数 10 センチメートル程度である。だとすると人間は電流より速く走れることになる。しかし、実際に電流と競争して勝てる人間はいない。実際には、電流が伝わる速度はほぼ光の速度に等しい。このことは、電流が電子の移動そのものではないことを意味している。

また、電気回路に直流電源をつないで電流を流した場合、電流は回路を一周して電源に戻ってくるはずである。しかし、回路の途中にキャパシタがある場合、キャパシタの極板間には明らかに電子は流れていない。しかしながら回路の電流は指数関数的に減衰するものの、キャパシタにも電流は流れる。これらの事実から、電流は電子の移動そのものではなく何か別の現象を意味しているのではないかと考えられる。では、電流とは本当は何を意味しているのだろうか。

キャパシタに流れる電流を説明するために、極板の間で電荷の移動以外に何が変化したかを考えてみる。キャパシタに電流  $i$  が流れると極板には電荷  $Q$  が蓄積される。逆に電流は電荷の時間変化率として次式で表せる。

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (5.2)$$

このとき、極板間には電荷  $Q$  によって電束  $\Phi$  が発生する。面積  $S$  の平行平板キャパシタでは、電束密度  $D$  は

$$D = \frac{Q}{S} \quad (5.3)$$

となる。よって、電流は

$$i = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.4)$$

と表せる。または電流密度  $\mathbf{J}$  [A/m<sup>2</sup>] を用いれば、電束密度との関係は

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (5.5)$$

と表せる。この式から、電流とは電束  $\Phi$  の時間変化という解釈が得られる。ではこの解釈は導線の中を流れる電荷と言う電流の解釈と矛盾しないのだろうか。理想的な電流は、連続して移動する導線に平行な線状電荷と考えられる。電荷の線密度を  $\sigma$  [Q/m]、速度を  $v$  [m/s] とすれば電流  $i$  は

$$i = \sigma v \quad (5.6)$$

である。この線状電荷は単位長さあたり  $\sigma$  の半径方向の電束をもっている。この電束が導線のある断面を速度  $v$  で通り抜けるなら、単位時間あたりの電束の通過量は

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sigma v \quad (5.7)$$

となる。これは電流の値と等しいので、結局電束密度の通過速度は

$$\frac{d\Phi}{dt} = i \quad (5.8)$$

と表される。電流を単位時間あたりの電束の通過量と考えても矛盾がないことがわかる。さらに、電荷自体の移動速度  $v$  は非常に遅くても、電荷移動の伴う電束の変化は一瞬と言えるほどの速度で伝達される。(実は、電束の変化の伝達速度は光の速さである。) 結局、電流の概念を一般化すると、単位時間あたりの電束の通過量として考えることができる。キャパシタにおける電束だけの变化による電流を、変位電流と呼んでいる。変位電流の概念はマクスウェルによって導入されたが、これにより電束が電流と同様に磁界を作り出すことになる。

## 5. 2 電界エネルギー

### 5. 2. 1 平行板キャパシタの電界エネルギー

面積  $S$  の導体板を短い距離  $d$  離して 2 枚並べ、それぞれの板 (極板) に  $+q$  と  $-q$  の電荷を与えたとき極板間に発生する電界を考えてみる。

$+$  の極板の電荷密度を  $\sigma$  として、その回りに断面積 1 の円筒領域を考えガウスの法則を適用する。内部の電荷量は  $\sigma$ 、電界は円筒の側面に平行なので両端の断面から垂直にしか出ていかないと考えると、

$$\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv = 1 \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = 2|\mathbf{E}| \quad (6.9)$$

よって、一方の極板が作る電界の強度  $E$  は

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon_0 S} \quad (6.10)$$

これを両極板で足し合わせると、極板の外では電界が打ち消し合い、結局極板の間にのみ足し合わされた

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 S} \quad (5.11)$$

の電界が発生する。このとき、極板間の電位差  $V$  は、電界を極板間の距離  $d$  で積分した値になるので

$$V = Ed = \frac{d}{\epsilon_0 S} q \quad (5.12)$$

このキャパシタの電気容量  $C$  は

$$C = \frac{q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (5.13)$$

で定義する。

電気容量が大きいほど電圧あたりの電荷発生量が多いことが分かる。では、電極間に誘電体を入れたらどうなるだろうか。誘電体のある場合は電界が変わってしまうが電束密度  $\mathbf{D}$  は真電荷量で決まるので変わらない。そこで式をつぎのように書き換える。

$$D = \sigma = \frac{q}{S} \quad (5.14)$$

ここに電束密度と電界の関係式

$$D = \epsilon E = \epsilon_r \epsilon_0 E \quad (5.15)$$

を代入すると、

$$E = \frac{q}{\epsilon S} \quad (5.16)$$

となり、誘電体中では電界の強度は誘電体の比誘電率を  $\epsilon_r$  として、 $1/\epsilon_r$  に弱くなる。このため、電位差も  $1/\epsilon_r$  となり、電圧あたりの電荷、すなわち容量は  $\epsilon_r$  倍に大きくなる。

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{Ed} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} \quad (5.17)$$

結局、電気容量は、極板間の誘電率を  $\epsilon$  とすると、一般に

$$C = \epsilon \frac{S}{d} \quad (5.18)$$

で表される。

キャパシタに電荷を貯めようとするとき外から電位差に逆らって電荷を運び込む必要がある。微小な電荷  $dq$  を運び込むときに必要な仕事を  $du$  と

$$du = Vdq = \frac{q}{C} dq \quad (5.19)$$

電荷が運ばれると電位差も変化するので、電荷  $Q$  をもつキャパシタに与えられた総仕事量  $u$  はこれを積分することで求められる。

$$u = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} [J] \quad (5.20)$$

これは仕事なので、キャパシタに蓄えられたエネルギーである。 $u$  をキャパシタの体積  $Sd$  で割ると体積あたりのエネルギー（空間の電界エネルギーの密度） $w_e$  が与えられる。

$$w_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{CSd} = \frac{1}{2} \frac{CV^2}{Sd} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{V^2}{d^2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 [J/m^3] \quad (5.21)$$

よって、電界中には  $1/2\epsilon E^2$  のエネルギーがたまっている。キャパシタは電氣的なエネルギーを電界のかたちで蓄える装置である。

## 5. 2. 2 電力と電界エネルギー

電圧  $V$  と電流  $I$  の積は、電圧は単位電荷あたりのエネルギー Joule/Coulomb であり、電流は電荷の時間的变化率 Coulomb/Second であるから、

$$[VI] = \frac{[\text{Joule}]}{[\text{Coulomb}]} \frac{[\text{Coulomb}]}{[\text{Second}]} = \frac{[\text{Joule}]}{[\text{Second}]} = [\text{Watt}] \quad (5.22)$$

となる。いわゆる電力[W]はエネルギーの時間に対する変化率であり、機械で使われる馬力 (horse power、Hp) は仏式と英式があるが、馬一頭が持つ動力[W]は約 800W である。電動機で、定格出力 800W、400W、200W はそれぞれ 1、1/2、1/4 馬力を意味する。

端子電圧  $V$  のキャパシタ  $C$  に蓄えられる電荷  $Q$  は

$$Q = CV \quad (5.23)$$

であるから、電流  $I$  は

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} CV = C \frac{dV}{dt} \quad (5.24)$$

である。したがって、キャパシタ  $C$  の電力  $P_e$  は

$$P_e = IV = C \frac{dV}{dt} V \quad (5.25)$$

となる。よって、キャパシタに蓄えられる電界エネルギー  $W_e$  は

$$W_e = \int_0^t P_e dt = \int_0^V CV dv = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} QV [J] \quad (5.26)$$

であり、これは平行板キャパシタのみならず全てのキャパシタに蓄えられる電界エネルギーは同じ形式で書けることを意味する。

変位電流密度  $\mathbf{J}_d$  は

$$\mathbf{J}_d = \frac{d\mathbf{D}}{dt} [A/m^2] \quad (5.27)$$

であるから、電界  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} [V/m] \quad (5.28)$$

と変位電流密度との内積は

$$p_e = \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} [W/m^3] \quad (5.29)$$

となり、キャパシタの単位体積当たりの電力となる。

キャパシタの単位体積当たりのエネルギー  $w_e$  は

$$w_e = \int_0^t p_e dt = \int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D} = \int_0^D \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} d\mathbf{D} = \frac{1}{2\epsilon} D^2 = \frac{\epsilon}{2\epsilon} E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} [J/m^3] \quad (5.30)$$

となる。

したがって、キャパシタ  $C$  に蓄えられる電界エネルギーは

$$\frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \int_V EDdv = \frac{1}{2} \int_V \frac{D^2}{\epsilon} dv = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv [J] \quad (5.31)$$

と書ける。ここで、 $V$ は体積である。

### 5. 2. 3 電界エネルギーとクーロン力

簡単のため電極の面積  $S$ 、電極間の距離  $d$ 、電極間の媒質の誘電率を  $\epsilon$  とした平行板キャパシタの電界エネルギー  $W_e$  を考えよう。

$$W_e = \frac{1}{2}CV^2(x) [J] \quad (5.32)$$

ここで、 $x$  は電極間の距離方向の位置とする。この電界エネルギーの位置  $x$  に関する変化率は

$$\frac{\partial W_e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2}CV^2(x) \right] = CV(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -QE[N] \quad (5.33)$$

$$\therefore Q = CV(x), \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

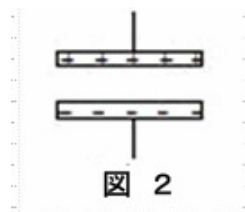
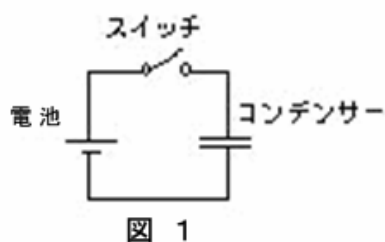
となり、これはクーロンの法則に他ならない。

一般にエネルギーが蓄積される系ではエネルギーが蓄積される過程で何らかの力 [Newton]、もしくはトルク [Newton-Meter] が働く。この力もしくはトルクに抗して、位置もしくは角度が変化して仕事になされ、この仕事はエネルギーとして蓄えられる。力もしくはトルクに抗して仕事になされ、この仕事が系に蓄積されず消費される場合のエネルギーは多くの場合、熱エネルギーとなる。系にエネルギーが蓄積されている場合、系の安定性は常にエネルギーを最小とする傾向を持つ。これは、平行板キャパシタを考えた場合、蓄積された電界エネルギーの変化率が電極間の吸引力を与え、電極間距離がゼロとなった場合に電荷が放電し、電界エネルギーがゼロとなることから明らかであろう。

以上のことから電界エネルギーを蓄積するキャパシタの極板間にはクーロン力が働くことから、キャパシタは電極の機械的強度がたらず壊れる場合がある。とくに交流から直流を得る整流回路の平滑用キャパシタが爆発することもある。このため、平滑用のキャパシタは円筒状のアルミ筒に覆われ、一端が意図的に壊れやすく構成してある。これは万が一爆発した場合、爆発のエネルギーを一方へ集中させて周辺への影響を削減するためである。

## 練習問題

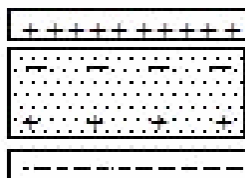
(1) 2枚の同じ形の導体板を極板とした平行板キャパシタを考える。このキャパシタの両極板に起電力  $V$  の電池とスイッチを図1のように接続した。両極板間に何も入れないでスイッチを閉じたところ、キャパシタの極板の電荷は図2のように分布した。



- (a) スイッチを閉じたまま、極板間に比誘電率  $\epsilon_r$  の誘電体を入れた。極板と誘電体上の電荷は図2と比べてどのようなになるか。電荷の分布を描け。
- (b) その後スイッチを開いてから、誘電体を抜いた。このとき、極板間の電位差はいくらになるか。
- (c) 問bで、誘電体を抜いたあとのキャパシタの静電エネルギー  $U_2$  と、抜く前のキャパシタの静電エネルギー  $U_1$  との比  $U_2/U_1$  はいくらか。

《解答》

- (a) 誘電分極によって誘電体の上側に負、下側に正の電荷が生じる。スイッチを入れたままだから極板間の電位差は等しい。誘電体を挿入することにより電気容量が増加するので、極板の電荷は増加する。



- (b) スイッチを開いたから極板の電荷は保存される。電気容量は減少したので、電位差は増加する。 $Q=CV$ であり、 $C$ が $\epsilon_r > 1$ だから減少する。 $Q$ が一定であるためには電圧が $\epsilon_r V$ になる。
- (c) はじめの電気容量を  $C_0$  とすると

$$U_1 = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 V^2, U_2 = \frac{1}{2} C_0 (\epsilon_r V)^2$$

$$\therefore \frac{U_2}{U_1} = \epsilon_r$$

- (2) 一様な線密度  $\lambda$  の帯電した  $2l$  の細い棒がある。いま、この棒の垂直二等分線面上に棒から  $a$  だけ離れた  $P$  点に点電荷  $Q$  を置いた場合の点電荷の受ける力を求めなさい。

《解答》棒状の中心から  $x$  の位置に微小部分  $dx$  を考える。この微小部分の電荷は  $\lambda dx$

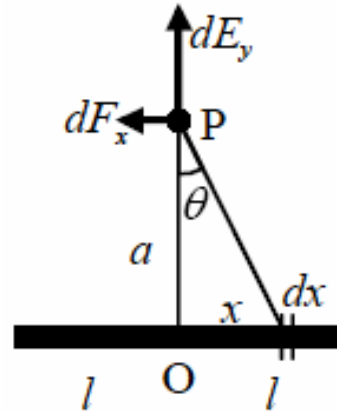
であり、これと点 P の電荷との間に働くクーロン力は

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\lambda dx}{x^2 + a^2}$$

となる。ここで棒と水平方向成分と垂直方向成分にわけて考えると

$$dF_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\lambda dx}{x^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$dF_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\lambda dx}{x^2 + a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$



となり、水平方向成分は打ち消しあい  $F_{\parallel} = 0$  になる。よって、点電荷の受ける力は

$$F = \int_{-l}^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\lambda dx}{x^2 + a^2} \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{adx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

置換積分のために  $x = a \tan \theta$  とおくと

$$dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

なので

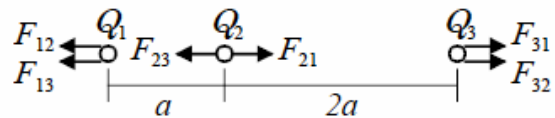
$$\begin{aligned} F &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{adx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{a}{(a^2 \tan^2 \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{a}{\frac{a^3}{\cos^3 \theta}} \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{Q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos \theta d\theta = \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \sin \theta_0 = \frac{Q\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \end{aligned}$$

となる。

(3) 一直線上に点電荷  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  が  $Q_1$ - $Q_2$  間が距離  $a$ 、 $Q_2$ - $Q_3$  間が距離  $2a$  隔てて置かれている。各電荷に働く力を求めなさい。

《解答》 $Q_1$  から  $Q_3$  の方向に働く力の向きを正とする。電荷  $Q_1$  に働く力  $F_1$  は  $Q_1$   $Q_2$  間に働く力  $F_{21}$  と  $Q_1$   $Q_3$  間に働く力  $F_{31}$  をあわせた力なので

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_{12} - F_{13} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{(3a)^2} \\ &= -\frac{Q_1 (9Q_2 + Q_3)}{36\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$



同様に電荷  $Q_2$  に働く力は  $Q_2$   $Q_1$  間に働く力  $F_{21}$  と  $Q_2$   $Q_3$  間に働く力  $F_{23}$  をあわせた力なので

で

$$\begin{aligned} F_2 &= -F_{21} - F_{31} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{(2a)^2} \\ &= \frac{Q_2 (4Q_1 - Q_3)}{16\pi\epsilon_0 a^2} \end{aligned}$$

また、電荷  $Q_3$  に働く力は  $Q_3$   $Q_1$  間に働く力  $F_{31}$  と  $Q_3$   $Q_2$  間に働く力  $F_{32}$  をあわせた力なので

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_{31} - F_{32} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{(3a)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{(2a)^2} \\ &= \frac{Q_2 (4Q_1 + 9Q_3)}{144\pi\epsilon_0 a^2} \end{aligned}$$

となる。

(4) 面積  $S$  の 2 枚の薄い導体極板を間隔が  $d_1$  になるように平行に置き、一方に電荷  $Q$  を他方に  $-Q$  を与える。次の問に答えなさい。ただし、導体上の電荷密度は場所に寄らず一定であり、電界は両導体間にのみ存在するものとする。

- (a) 両極板間の引き合う力を求めよ、
- (b) 極板に力を加えて間隔を  $d_2$  まで広げるとき、どれだけの仕事が必要か？
- (c) 両極板間の電位差を常に  $V$  に保つようにして、極板間の間隔を  $d_1$  から  $d_2$  まで変化させるとき、どれだけの仕事が必要か？

《解答》

(a) 下の電極上の電荷  $-Q$  がその上下の空間につくる電界を求める。

$S$  内の電荷の総和は  $\sigma S$  なので、ガウスの法則より

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 2SE = \frac{\sigma S}{\epsilon_0},$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \therefore E_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{Q}{2\epsilon_0 S}$$

となる。この電界から上の電極上の電荷  $Q$  が受ける力両極板間が引き合う力に等しいので、その大きさ  $F$  は

$$F = Q|E| = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}$$

となる。

(b) 一定の力  $F$  を加えて、極板間の距離を  $d_2 - d_1$  だけ離すので、これに要する仕事  $W$  は

$$W = F(d_2 - d_1) = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}(d_2 - d_1)$$

(c) 極板間の距離を  $x$  とすれば、正の電極上の電荷  $Q$  は

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 S}{x} V$$

と表される。したがって、極板間に働く力  $F$  は

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2}$$

となる。したがって、極板間の距離を  $d_2 - d_1$  だけ離すのに要する仕事  $W$  は

$$W = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} dx = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right)$$

となる。

(5) 面積  $S$ 、間隔  $d$  の平行板キャパシタの一方の極板に電荷  $Q$  を与える。電極の間に、面積が同じで厚さが  $t$  の板状導体を極板に平行に入れると、全体の電気容量はどうなるか？また、このときのキャパシタ全体がもつ静電エネルギーを求めなさい。

《解答》上の電極と板状導体の間隔を  $d_1$ 、下の極板と板状導体の間隔を  $d_2$  とする。板状導体を入れると全体としての電気容量が  $C_1 = \epsilon S/d_1$  と  $C_2 = \epsilon S/d_2$  の 2 つのキャパシタを直列に接続したものと同一になる。したがって、全体の電気容量  $C$  は

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

の関係から

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \frac{S}{d_1} \epsilon_0 \frac{S}{d_2}}{\epsilon_0 \frac{S}{d_1} + \epsilon_0 \frac{S}{d_2}} = \epsilon_0 \frac{S}{d_1 + d_2} = \epsilon_0 \frac{S}{d - t}$$

と求められる。また全体の静電エネルギー  $U$  は

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 (d - t)}{2\epsilon_0 S}$$

となる。

## 第6章 磁界、アンペアの法則

### 6.1 電流と磁界の関係

#### 6.1.1 電流周辺の磁界

導線に電流が流れると、まわりに磁界が生ずる。導線の形により、どんな磁界ができるか述べる。

**直線導体上の電流** 電流が流れている電線の周囲には図 6.1 のように電流の進行方向を奥に見ると時計回りの磁界が発生する。これを電磁誘導という。図 6.1 の磁界と書いてある矢印線を磁力線とよぶ。この電流と磁力線の方法は、アンペア右ねじの法則という関係がある。ねじは右に回すと直進していくことからこの名前が付いている。

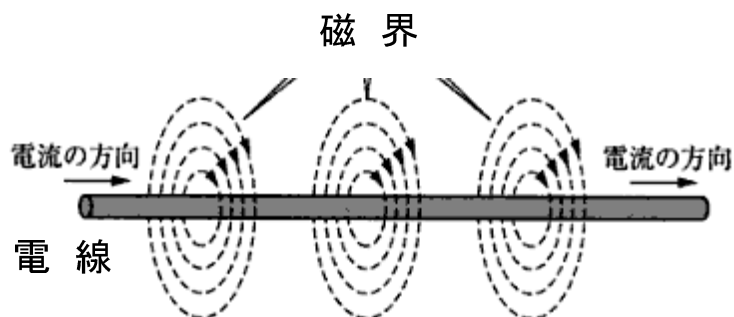


図 6.1 電磁誘導

**導線断面の磁界** 導線を中心とした同心円状に磁界ができる。導線に近いほど磁界が強い（導線に近いほど磁力線の間隔がせまい）。磁界を強くするには導線に流す電流を大きくする。

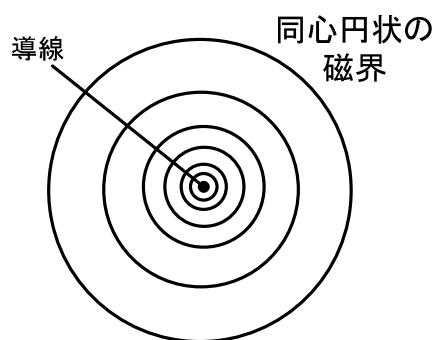


図 6.2. 導線断面の磁界

**磁界の向き（右ねじの法則）** 「電流がつくる磁界」の向きを求める。右ねじのまわる向

き=磁界の向き：右ねじの進む向き=電流の向き。

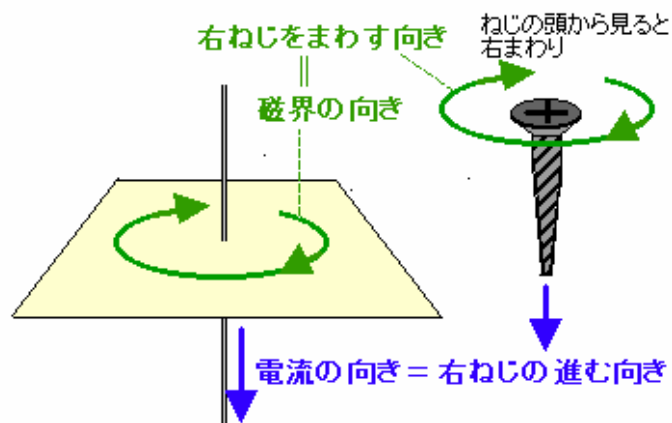


図 6.3. 電流の方向と磁界の方向

**コイル状の導線（有限長ソレノイドコイル）周辺の磁界** コイルの内側でコイルの軸に平行な磁界ができる（電磁石の原理）ことが特徴である。棒磁石のつくる磁界とよく似ている。磁界を強くするには ①鉄心を入れる、②コイルに流す電流を大きくする、③コイルの巻き数を多くする。

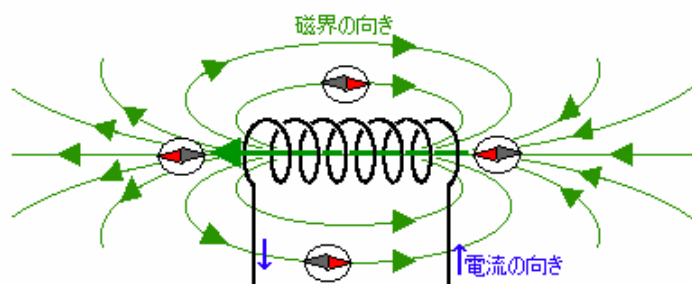


図 6.4 コイル状の導線（有限長ソレノイドコイル）周辺の磁界

有限長ソレノイドコイルの磁界が図 6.4 のようになる理由を考える。コイルの一部分に注目すると、その導線のまわりにできる磁界はコイルの内側ではすべて一方向を向く。磁力線の出るコイルの端は N 極、磁力線が入るコイルの端は S 極となる。

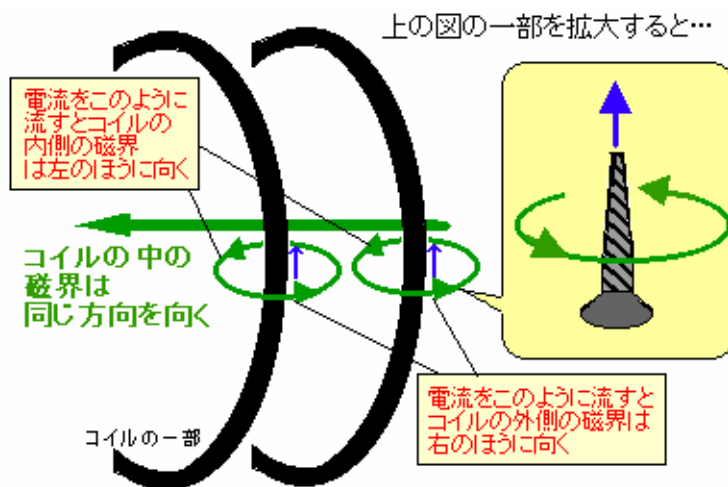
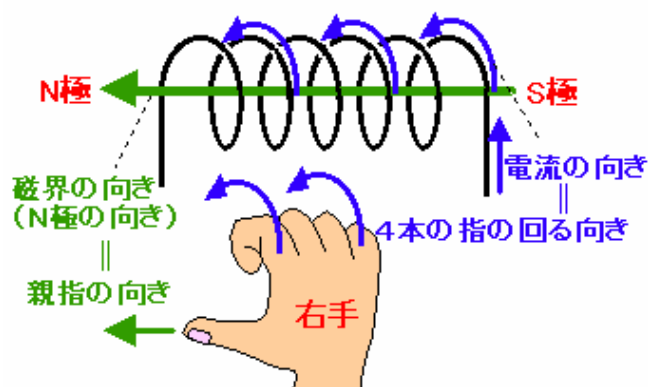


図 6.5. 有限長ソレノイドコイルの磁界の局所拡大図

コイルの内側の磁界の向き(右手則で求める)    コイル端のどちらが N 極となるか求める。  
 4 本の指をまわす向き=電流の向き：親指の向き=コイル内側の磁界の向き (N 極の方向)。



コイルをつかむようにして親指を立てます。

図 6.6. コイルの内側の磁界の向き

### 6. 1. 2 歴史的経過

**電流の磁気作用の発見の意義** 1785 年のクーロンの法則の発見以来、磁気に関するみるべき発見はしばらくなかった。1799 年にボルタの電池が発明され、電池が両極を持っている装置であることから、電池と磁石の類似を考えて、1800 年代の初期に電池をつり下げて磁石のように両極が南北を指すかどうかを調べたり、電池に磁石を近づけて力がはたらくかどうかを調べたりした実験がある。

1820 年、エルステッド(H.C.Oersted 1777～1851)は、磁針に平行に導線を張って電流を流すと磁針がふれ、電流を反対向きに流すと磁針のふれも反対になることを発見した。この直線電流による磁界の発見について、エルステッドは「電流は針金の中に閉じ込められていないで、同時に周りの空間に広がる」と述べている。エルステッドの発見は、電磁

気学の歴史にとって画期的なことであった。それまで電気と磁気とはよく似ているが、あくまでも別々の現象であると考えられてきたのに対し、両者の間に密接な関係のあることを初めて明らかにしたからである。エルステッドの発表は、1820 年 7 月 21 日であったが、

それがデンマークからパリに伝えられたのが同年 9 月 11 日であったから、当時としては異例の速さである。エルステッドの発見の報は、アラゴー(F.Arago 1786~1853)らによって、各国でただちに追試された。同年 9 月 18 日には、アンペールが電流相互間の力を明らかにし、10 月 30 日には、ビオ・サバールの法則が発表された。

**アンペールの法則とビオ・サバールの法則** アンペールの法則は、アンペール(A.M.Ampère 1775~1836)によって確立されたもので、定常電流の閉回路がつくる磁界を決める法則である。「閉回路を縁とする任意の曲面に磁気二重層を考え、その単位面積当たりの磁気モーメントが曲面の法線方向を向き、大きさが定常電流の大きさ  $I$  に比例して  $\mu_0 I$  に等しいとすれば、定常電流がつくる磁界  $H$  は、この磁気二重層がつくる磁界に一致する。ここで、 $\mu_0$  は真空中の透磁率と呼ばれる定数であり、磁界の通しやすさを表すパラメータである。また、磁界の方向は、電流方向を右ねじの進行方向にとれば、その回転方向に一致する。」後半は、電流がつくる磁界の方向を表す。いわゆる右ねじの法則の部分、アンペールの法則とよばれることもあり、1826 年に、アンペールによって明らかにされた。アンペールの法則は、「磁極および閉電流がつくる磁界の中で、任意の経路に沿って単位の磁荷を一周させるのに要する仕事は、この経路を縁とする任意の面を貫く電流の総量に比例する」と同じである。すなわち、電流の周りの閉曲線を任意にとり、その微小部分  $ds$  の接線方向の成分を  $H_s$  とすると、

$$\oint \mathbf{H}_s \cdot d\mathbf{s} = \sum_{i=1}^n I_i \quad (6.1)$$

である。積分は閉曲線全体について行う。

アンペールの法則を電流が閉じていない場合に拡張することにより、マクスウェル(J.C.Maxwell 1831~1879)は、(6.1)式の右辺に変位電流を加えて、マクスウェルの基礎方程式の 1 つに変形した。

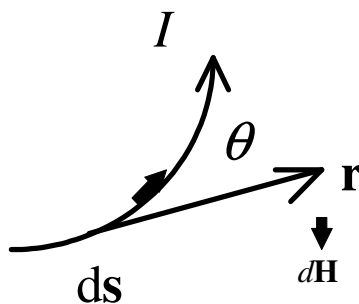


図 6.7 ビオ・サバールの法則

ビオ・サバールの法則は、1820 年、ビオ(J.B.Biot 1774~1862)とサバール(F.Savart 1791~1841)が共同研究の結果として発表した。任意の形をした導線を通る電流がその周囲につくる磁界を決める法則である。

図 6.7 で、電流の大きさを  $I$ 、回路の微小要素を  $d$ 、その微小要素  $s$  から磁界を計算すべき点に向かう位置ベクトルを  $\mathbf{m}_r$ 、計算すべき磁界ベクトルを  $\mathbf{H}$  とすると、

$$\mathbf{H} = \int_c \frac{I}{r^3} [d\mathbf{s} \times \mathbf{m}_r] \quad (6.2)$$

となる。この法則は 3 次元であるが、2 次元に適用すればアンペールの法則となる。ビオとサバールは、電流の微小要素  $I ds$  による磁界への寄与を考え、その寄与を電流全体にわたって合成したものが  $H$  となると考えた。(6.2)式で大きさだけを考えると、微小要素  $I ds$  による磁界  $dH$  は

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{r^2} ds \quad (6.3)$$

となる。(6.3)式はビオ・サバールの法則の微分形である。

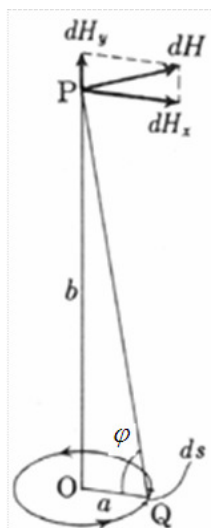


図 6.8 ループ電流が作る磁界

**円形電流がつくる磁界** 円の半径を  $a$ 、その中心を  $O$  とする。まず、 $O$  から  $b$  の距離にある軸上の点  $P$  における磁界の強さ  $H$  を、ビオ・サバールの法則を用いて計算しよう。電流の微小要素  $ds$  が点  $P$  につくる磁界  $dH$  を求める。 $dH$  を軸方向に垂直な成分  $dH_x$  と、軸方向の成分  $dH_y$  とに分解すると、図 6.8 において、点  $Q$  が経路上のすべての点をとるとき、 $dH_x$  はコイル全体を考えれば互いに打ち消す。したがって、 $dH_y$  だけについて計算すればよい。(6.3)式において、 $\theta = \pi/2$  だから、

$$dH_y = dH \cos \varphi = \frac{I}{4\pi} \frac{ds}{a^2 + b^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (6.4)$$

したがって、 $P$  点の磁界  $H$  は

$$H = \oint_C dH_y = \frac{I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi a} ds = \frac{Ia^2}{2(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.5)$$

円の中心 O の磁界  $H_0$  は、(6.5)式で  $b=0$  とおいて、

$$H_0 = \frac{I}{2a} \quad (6.6)$$

**無限に長い直線電流による磁界** 磁界は直線電流をとり囲んで同心円状となるから、直線から距離  $a$  の点での磁界の強さを  $H$  とすると、半径  $a$  の円周に沿って、アンペールの法則(6.1)式を適用すると、

$$2\pi a \times H = I \quad \therefore H = \frac{I}{2\pi a} \quad (6.6)$$

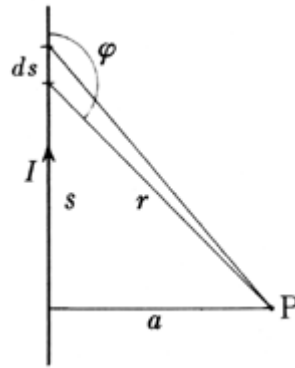


図 6.9 直線導体を作る磁界計算

ビオ・サバールの法則(6.3)式を用いて計算する。図 6.9 で、

$$r = \frac{a}{\sin \varphi}, s = -a \cot \varphi,$$

$$\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi, \frac{\cos(\pi - \varphi)}{\sin(\pi - \varphi)} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = -\cot \varphi \quad (6.7)$$

$$\therefore ds = \frac{a}{\sin^2 \varphi} d\varphi$$

したがって、

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{a} d\varphi \quad \therefore H = \frac{I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{I}{2\pi a} \quad (6.8)$$

(6.8)式はアンペールの法則がビオ・サバールの法則から導かれることを意味する。

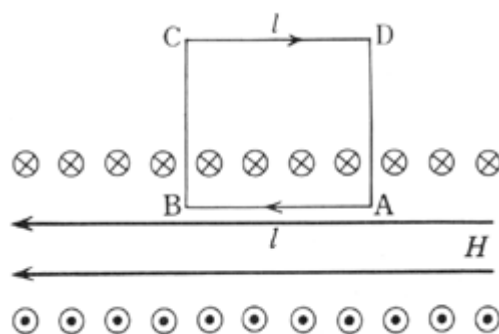


図 6.10. 無端ソレノイド内部の磁界

**ソレノイド内部の磁界** 図 6.10 のように、電流をとり囲む長方形の回路 ABCDA に沿って、アンペールの法則(6.1)式を用いて計算する。CD 部分での磁界は 0 であり、BC 部分と DA 部分では磁界の方向は経路  $l$  に垂直であり、また、長方形が取り囲む電流は  $I$ 、単位長さ当たりの巻数を  $n_0$  とすれば、 $n_0 \times I$  であるから、

$$H \times l = n_0 l \times I \quad \therefore H = n_0 I \quad (6.9)$$

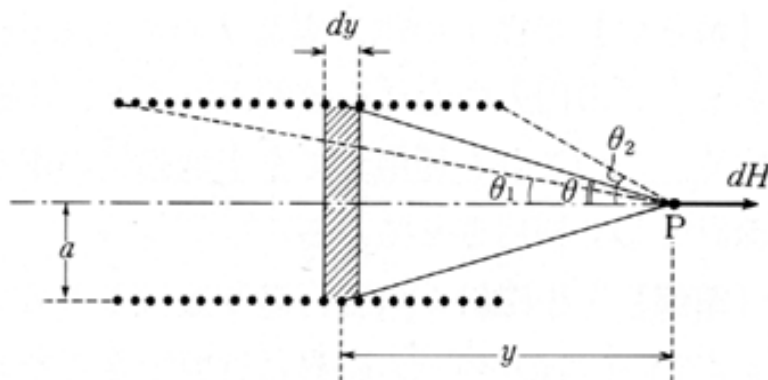


図 6.11 ソレノイドの磁界

(6.3)式のビオ・サバールの法則で軸上の点の磁界を計算する。図 6.11 に示すように、ソレノイドの半径を  $a$ 、長さを  $l$ 、単位長さ当たりの巻数を  $n_0$  とする。ソレノイドの微小部分  $dy$  が  $n_0 dy$  個の円形電流からできているとすると、これに電流  $I$  が流れるため、P 点に生じる磁界  $dH$  は、(6.5)式を用いて、

$$dH = \frac{a^2 I}{2(a^2 + y^2)^{3/2}} n_0 dy \quad (6.10)$$

図 6.10 から、

$$y = a \cot \theta \quad \therefore dy = -a \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = -a \frac{a^2 + y^2}{a^2} d\theta = -\frac{a^2 + y^2}{a} d\theta \quad (6.11)$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 H &= \int dH = \frac{n_0 I}{2} \int \frac{a^2}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = \frac{n_0 I}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a^2}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left( -\frac{a^2 + y^2}{a} d\theta \right) \\
 &= -\frac{n_0 I}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} d\theta = -\frac{n_0 I}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{n_0 I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)
 \end{aligned} \quad (6.12)$$

無限に長いソレノイドによる磁界  $H$  を求めるには、上式で、 $\theta_1 \rightarrow 0$ 、 $\theta_2 \rightarrow \pi$  とおいて、  
 $H = n_0 I$  (6.13)

となる。この結果は(6.9)式と当然一致する。

## 6. 2 フレミングの左手則

### 6. 2. 1 電流と磁界間の力

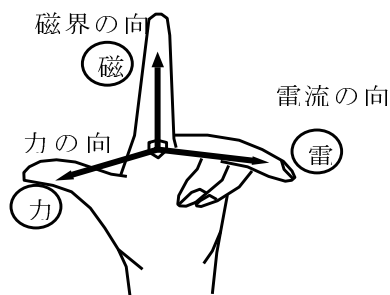


図 6.12 フレミングの左手の法則

導線に電流を流すと、導線に力がはたらく。このとき、導線にはたらく力の向きは図 6.12 の親指の方向になる。導線にはたらく力の向きを知るには、フレミングの左手の法則 (図 6.12) が使われる。左手の親指、人差し指、中指をそれぞれ直角に開く。磁界の向き：人差し指、電流の向き：中指。このとき、親指が導線にはたらく力の向きになるとなる。これがフレミングの左手の法則である。

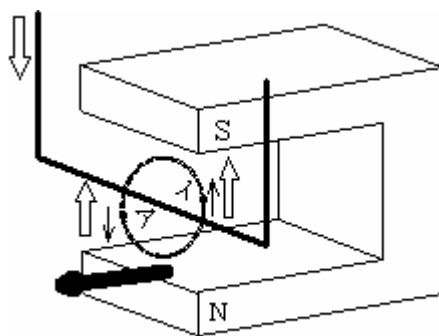


図 6.13 なぜ電流を流すと導線に力が電流はたらくのか？

なぜ電流を流すと導線に力が電流はたらくのかを考える。図 6.13 の点アと点イ付近の磁界の向き (①と②) について比べる。① 導線に電流を流すことによって生じる磁界の向き

を実線で描かれた矢印とする。② 導線のまわりにある磁石による磁界の向きを大きな矢印とする。点ア付近は、①と②が逆向きであり、磁界は差となる。点イ付近は、①と②が同じ向きであり、磁界は和となる。このとき、電流が流れている導線にはたらく力は、磁界が和となる方から磁界が差となる方向へ力がはたらく。磁界が和となる部分は磁気エネルギーが大きいから、電流が流れる導線が磁界の差となる弱い磁界方向へ移動して磁気エネルギーを減らそうとする。

### 7. 2. 2 力の大きさ

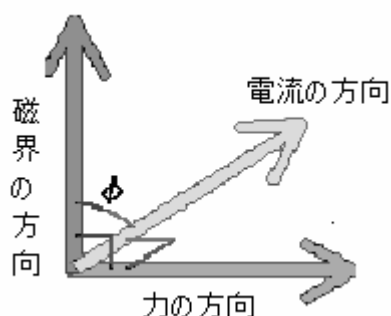


図 6.14 電流と磁界間の力の大きさ

磁界中にある長さ  $l$ [m] の導線を通る電流  $I$  が磁界から受ける力の大きさは  $\mu_0$  を真空中の透磁率 [ $4\pi \times 10^{-7}$  H/m, henry/meter] とすれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I \times \mathbf{B} [N], \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H} [T = \text{Tesla} = \text{Wb} / m^2] \end{aligned} \quad (6.14)$$

となる。

(6.14) 式で  $\mathbf{B}$  は磁束密度と呼ばれ、真空中では透磁率  $\mu_0$  と磁界  $\mathbf{H}$  の積で与えられる。透磁率とは一般に磁界に対する媒質の性質を表す物性定数であり、特に真空中の場合を記号  $\mu_0$  と書き、真空中の誘電率は  $\epsilon_0$  であるから、

$$C_0 (\text{光の速度}) : 3 \times 10^8 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} [m/s] \quad (6.15)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$$

で定義される。

**電荷のサイクロトロン運動** ところで、電流  $\mathbf{I}$  は電荷の移動であるから、 $q$  なる電荷が速度  $\mathbf{V}$  で移動するときには、

$$q\mathbf{V} = \mathbf{I}$$

なる関係があるから、電荷  $q$  が  $\mathbf{B}$  から受ける力は、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (6.16)$$

となる。

この関係をニュートンの第二法則に適用する。

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (6.17)$$

ここに、 $m$  は電荷の質量である。この式を  $x$ 、 $y$ 、 $z$  直交座標の 3 成分に分けて書くと、以下ようになる。ただし、磁界は  $z$  方向を向く一様磁界とする。

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} = q \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

この式の第 3 番目の式から、電荷は印加磁界の方向である  $z$  方向には慣性運動しかない。つぎに、(6.18)式の第 1 式と第 2 式とを連立方程式として解くと、

$$\begin{aligned} m \frac{dv_y}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} \right) = \left( \frac{m^2}{qB} \right) \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -qv_x B \\ \frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left( \frac{qB}{m} \right)^2 v_x &= 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

を得る。(6.19)式を満足する解は

$$v_x = \begin{cases} \cos \omega_H t \\ \sin \omega_H t \end{cases}$$

である。ただし、ここに  $\omega_H$  はサイクロトロン角周波数(cyclotron frequency)と呼ばれる物理量で、

$$\omega_H = \frac{qB}{m} \quad (6.20)$$

とする。

$A$ 、 $B$  を定数とすれば、一般解は

$$v_x = A \cos \omega_H t + B \sin \omega_H t \quad (6.21)$$

と書ける。(6.21) 式を(6.18) 式の第 1 式に代入して、

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left( A \cos \frac{qB}{m} t + B \sin \frac{qB}{m} t \right) \\ &= qB (-A \sin \omega_H t + B \cos \omega_H t) = qv_y B \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\therefore v_y = -A \sin \omega_H t + B \cos \omega_H t$$

を得る。(6.21) 式で、 $A$  や  $B$  は、任意の係数であり、これらは初期条件によって決定される。  
例えば、 $t=0$  において、 $v_x=v_0$ 、 $v_y=0$  の初期条件とすれば、

$$\begin{aligned} t=0 \quad v_x &= v_0 & v_x &= A \cos \omega_H \times 0 = A = v_0 \\ t=0 \quad v_y &= 0 & v_y &= B \cos \omega_H \times 0 = B = 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \omega_H t \\ v_y &= -v_0 \sin \omega_H t \end{aligned} \quad (6.24)$$

となる。ここで、電荷の位置を求めるためには、(6.24)式を積分する。すなわち、

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_H} \sin \omega_H t + K_1 \\ y = \frac{v_0}{\omega_H} \cos \omega_H t + K_2 \end{cases} \quad (6.25)$$

を得る。ここに  $K_1$  と  $K_2$  は積分定数であり、電荷の位置の初期条件によって決定される。一例として、電荷が  $t=0$  において、 $x=0$ 、 $y=0$  とすれば、

$$\begin{aligned} t=0 \quad x &= \frac{v_0}{\omega_H} \sin \omega_H t + K_1 = 0 & K_1 &= 0 \\ t=0 \quad y &= \frac{v_0}{\omega_H} \cos \omega_H t + K_2 = \frac{v_0}{\omega_H} + K_2 = 0 & K_2 &= -\frac{v_0}{\omega_H} \end{aligned} \quad (6.26)$$

であるから、

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_H} \sin \omega_H t \\ y = \frac{v_0}{\omega_H} (\cos \omega_H t - 1) \end{cases} \quad (6.27)$$

となる。(6.27)式から、

$$x^2 + \left( y + \frac{v_0}{\omega_H} \right)^2 = \left( \frac{v_0}{\omega_H} \right)^2 \quad (6.28)$$

の関係を得る。この(6.28)式を用いて、電荷の軌跡をトレースしてみたのが図 6.15 である。

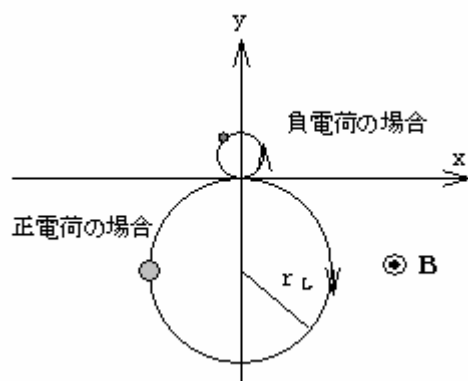


図 6.15 電荷のサイクロトロン運動の模式図

図 6.15 から、電荷は、磁界を中心軸とする円運動を行い、その運動の時間周期は  $2\pi/\omega_H$  であり、円運動の方向は、正の電荷にあつては時計方向、負電荷の場合には反時計方向となる。この電荷の運動の半径をラーマー半径(Larmor radius)といい、

$$r_L = \frac{v}{\omega_H} = \frac{mv}{qB} \quad (6.29)$$

で与えられる。ラーマー半径は、電荷の質量が大きいほど、速度が大きいほど大きくなること、磁界が大きいほど小さくなる。

**ホール効果** 図 6.16 のような半導体片があるとする。これに直流電圧を印加すると、図 6.16 のように電流が流れる。この半導体片に静磁界  $\mathbf{B}$  を印加すると、フレミング力によって電流は下方へ偏る。

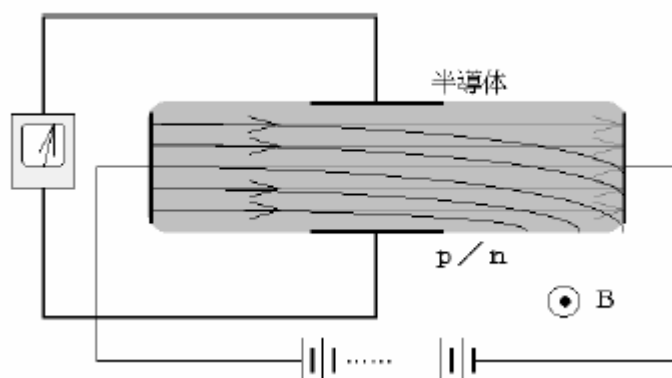


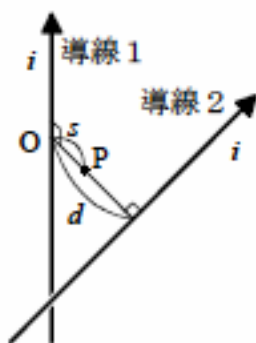
図 6.16 半導体のホール効果

この半導体が p 型半導体であれば、電流を運ぶキャリアはホール（正の電荷）であるから、下部には正の電荷が過剰になって、下部に正、上部に負の電圧が生ずる。また、n 型半導体であれば下部に負電荷が過剰になって、下部が負、上部が正の電圧に帯電する。こ

の現象を特にホール効果(Hall effect)という。このホール効果を用いて電圧の正負を調べれば試半導体が p 型か n 型か判定できる。

## 練習問題

(1) 距離  $d$  だけ離れた 2 本の無限に長い直線状の導体が互いに直角に置かれている。両導体間に等しい電流  $i$  が図のように流れるとき、両導線間の最短距離を結ぶ線上、O 点から距離が  $s$  の P 点に生じる磁束密度  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  の大きさを求めよ。



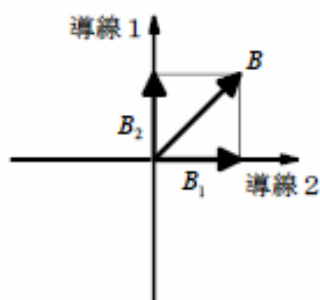
《解答》導線 1 を流れる電流によって P 点につくる磁束密度  $B_1$  は、導線 2 と平行で電流と同じ向きを向き、その大きさ  $B_1$  は

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi s}$$

である。一方、導線 2 を流れる電流が P 点につくる磁束密度は導線 1 と平行で電流と同じ向きを向き、その大きさ  $B_2$  は

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-s)}$$

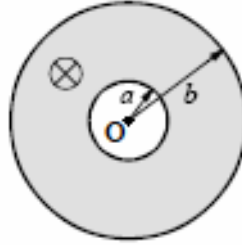
となる。よって 2 導線による磁束密度は図のような向きをとり、その大きさ  $B$  は



$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi s}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(d-s)}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi s}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(d-s)}\right)^2} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(d-s)^2}} \end{aligned}$$

となる。

- (2) 図のように内半径  $a$ 、外半径  $b$  の無限長中空導体に電流  $I$  が流れているとき、(a)中空部、(b)導体部および(c)導体外部の磁束密度を求めよ。



《解答》中心軸に垂直な平面に、中心が同じで半径が  $r$  の円の閉じた経路  $C$  を考えこれにアンペールの法則を適用する。

- (a) 中空部の場合、 $C$  を通過する電流は  $0$  なので、

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B(2\pi r) = 0$$

となる。よって、磁束密度は  $0$  となる。

- (b) 閉曲面に含まれる導体の面積  $S_C$  は

$$S_C = \pi r^2 - \pi a^2 = \pi(r^2 - a^2)$$

となる。この導体の断面積  $S$  は

$$S = \pi b^2 - \pi a^2 = \pi(b^2 - a^2)$$

であり、ここに電流  $I$  が流れているので、閉曲面を流れる電流  $I_C$  は

$$I_C = \frac{\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)} I = \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I$$

したがって、導体部の中心からの距離が  $r$  の点での磁束密度  $\mathbf{B}$  は

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \times 2\pi r = \mu_0 I_C = \mu_0 \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} I$$

となる。

- (c) 導体外部の場合、閉曲面に含まれる電流は  $I$  なので中心から距離  $r$  の点の磁束密度  $\mathbf{B}$  は

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \oint_C dl = B(2\pi r) = \mu_0 I \quad \therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

となる。

## 第7章 電磁誘導、磁性体、インダクタンス

### 7. 1 電磁誘導

#### 7. 1. 1 定義

電磁誘導（でんじゆうどう、Electromagnetic induction）とは、磁束が変動する環境下に存在する導体に電位差（電圧）が生じる現象である。また、このとき発生した電流を誘導電流という。

#### 7. 1. 2 歴史的経緯

一般にはマイケル・ファラデーによって 1831 年に誘導現象が発見されたとされるが、先にジョセフ・ヘンリーに発見されている。また、フランセスコ・ツァンテデシ（Francesco Zantedeschi）が 1829 年に行った研究によって既に予想されていたとも言われる。

#### 7. 1. 3 ファラデーの法則

ファラデーは閉じた経路に発生する起電力が、その経路によって囲われた任意の面内を通過する磁束の変化率に比例することを発見した。すなわち、これは、導体によって囲われた面を通過する磁束が変化した時、すべての閉回路には電流が流れることを意味する。これは、磁束の強さそれ自体が変化した場合であっても、導体が移動した場合であっても適用される。電磁誘導は、発電機、誘導電動機、変圧器など、多くの電気機器の動作原理となっている。

ファラデーの電磁誘導の法則は、次のように示される。

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.1)$$

ここで、 $e$  は起電力 (V)、 $\Phi_B$  は、磁束 (Wb) とする。同じ領域に  $N$  回巻かれたコイルが置かれた場合、ファラデーの電磁誘導の法則は、次のようになる。

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.2)$$

ここで、 $N$  は電線の巻数である。

#### 7. 1. 4 レンツの法則

レンツの法則は、起電力に方向を与えた。すなわち、回路に発生する起電力は、起電力によって回路を流れる電流が起す磁束が、与えられた磁束変化に逆らうような方向で発生する。それゆえ、(7.1)式の負号は、レンツの法則に由来する。

**電磁誘導加熱** コイルに強い電流を流すと、強力な磁場が発生する。この上に電気を通しやすい鉄、ステンレスといった金属を置くと、電磁誘導により渦電流が発生し、抵抗により金属が発熱する。この原理を電磁誘導加熱 (IH, induction heating) といい、IH クッキングヒーターを代表とする電磁調理器がある。IH 調理器の場合、基本的には鉄やステンレスといった磁石に吸い付く性質のある金属でないと使用できないが、最新ものでは電流の流れ方を工夫することによって、アルミニウムや銅など金属であれば使えるものもある。た

だし、鍋の底は平滑なものでなければならず、鉄製でも中華鍋のような底の丸いものは渦電流が発生しにくいので使えないため、鍋を購入する際は十分検討する必要がある。また、IH クッキングヒーターの作動中は強い電磁界が発生しているため、心臓ペースメーカーを入れている場合は誤動作を起す可能性があり、導入に際しては医師に相談する必要があるとされる。骨折等により体内への医療金属素材を使用している場合にも相談する必要がある。

## 7. 2 磁性体

### 7. 2. 1 磁性体の定義

磁性体（じせいたい）とは反磁性体・常時性体・強磁性体の 3 つに分けられ、すべての物質が磁性体であるといえるが、普通は強磁性体のみを磁性体と呼ぶ。比較的簡単に磁極が消えたり反転してしまう磁性体は軟磁性体と呼ばれ、そうでない磁性体は硬磁性体と呼ばれる。代表的な軟磁性体に酸化鉄・酸化クロム・コバルト・フェライトなどがある。固体状態のものは磁石として、電動機の界磁（磁界を作る部分）として使用される。硬磁性材料の円盤上に磁性粉を塗布あるいは蒸着したものがハードディスク装置というコンピュータの記憶装置に用いられる。柔軟な合成ゴムにまぜて板状にするとマグネットシートになり、液体にコロイド分散させると磁性流体となる。医療分野では強力な磁界を使った MRI やごく微弱な磁力を測定する SQUID のパーツとして使われている。新しい情報記憶素子の MRAM などを含むスピントロニクスと呼ばれる科学研究分野が注目されている。

#### 電気機器用磁性材料

- ・ 圧粉心：純鉄・パーマロイ・センダスト合金などの磁性材料を粉砕した後、圧縮形成したもので、粉体間の電気抵抗が大きくうず電流損が小さい。
- ・ アモルファス：非晶合金、一部が変圧器の鉄心として使われている。
- ・ 小型電動機用磁性鋼帯：鉄損が大きい、けい素含有量 0～0.5% の素材を 0.5 または 0.65mm の厚さに圧延したものであり、小型回転機に使用される。
- ・ 磁極用鋼帯：機械的強度が大きい、けい素を含有しない素材を 1.6 または 3.2mm の厚さに圧延したものである、回転機の回転子に使用される。
- ・ 磁気記録用磁性材料：酸化鉄(III)、クロム酸化鉄（フェリクロム、FeCr）、コバルト酸化鉄、メタル磁性体、バリウムフェライト（BaFe）磁性体。

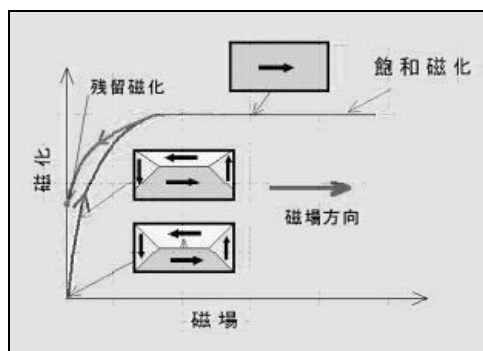


図 7.1. 磁化曲線と磁区の構造

**磁壁の移動と磁化過程** 磁性体は磁区と呼ばれる原子レベルの磁石の静磁エネルギーが最小になるように凝集した磁区 (Magnetic domain) の集合からなる。鉄などの普通の強磁性体は、磁界がかかっていないと、静磁エネルギーを最小にするため図 7.1 左下のように、外部に磁力線を出さないような磁区構造を持ち、磁化は 0 となる。外から磁界がかかると、磁界方向に磁化が増加することで全体のエネルギーが下がるので磁壁が移動し、磁界方向を向いた磁区が大きくなり、磁化が発生する (図 7.1 中央)。さらに、磁界を強めると、結晶全体が磁界方向の磁区のみになり、これ以上増加しない (図 7.1 上図)。これを飽和といい、このときの磁化を飽和磁化という。このとき、この強磁性体が純度の高い金属であれば、磁壁移動は容易に起こり、わずかの磁界で飽和に達する。しかし、不純物を含んでいると、磁壁移動が不純物に邪魔され、飽和に達するためにより大きい磁界が必要となり、また、飽和後磁場を 0 にしても、磁化は 0 に戻らず、残留磁化が残る。

### 7. 2. 2 磁性体の構成方程式

磁性体に磁界を印加したとき、以下の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} \\ &= \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \chi_m \mathbf{H} \quad (7.3) \\ &= \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}\end{aligned}$$

ただし、ここで

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (7.4)$$

を仮定した。ここに、 $\chi_m$  のことを磁化率 (magnetic susceptibility) という。(7.3) 式で、

$$\mu_s = 1 + \chi_m \quad (7.5)$$

とすると、

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (7.6)$$

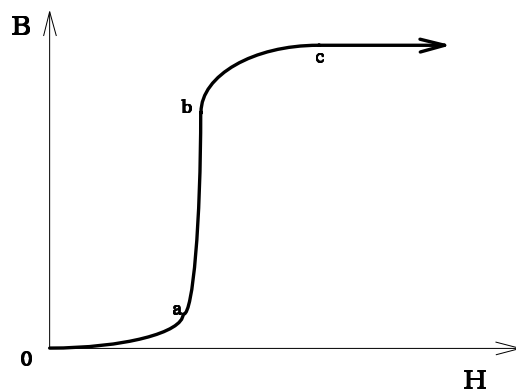
と置くことができる。ここで、 $\mu_r$  のことを比透磁率 (relative permeability) という。このように、物質中では、真空には存在しない磁化電流なる電流が存在していて、そこへ磁界が印加されると、磁化電流はある場合にはその磁界を強めるように、またある場合には弱めるように配列し、そのために物質を磁界の中に入れるとその磁束密度は(7.3)式に示すように磁化ベ

クトル $\mathbf{M}$ だけ大きくなったり、小さくなったりする。それゆえ物質の比透磁率 $\mu_r$ は $\chi_m$ だけ違いを生ずると考える。

以上が巨視的な物質中の磁界に関する考え方である。

**常磁性体** 物質を構成している原子や分子の電子の軌道角運動量あるいはそれらのスピンによる自発磁化が存在するような場合には、磁界が印加されることによってその自発磁化の方向が揃えられることがある。そのようなときに示す磁性を常磁性体(paramagnetic substance)という。したがって、一定温度を越えると、自発磁化の方向がばらばらになって、磁化率が急激に減少して磁性を失う。この温度をキュリー温度という。

**強磁性** 多くの物質の中、鉄やニッケル、あるいはコバルトのように極めて強い磁性を示すものがある。こういうものを強磁性体 (ferromagnetic substance) という。



磁気飽和特性

図 7.2 初期磁化曲線(残留磁気がゼロから磁化した磁気飽和曲線)

処女の状態(熱消磁などで残留磁化をゼロとした状態)の強磁性体へ磁界を印加すると、最初はなかなか磁化されない(0～a)が、磁界を強めていくと磁化され(a～b)、やがて飽和に達し(b～c)、それ以上いくら磁界を強めても磁束密度は増加しなくなる。こういう特性を強磁性体の飽和特性という。

**磁区** 磁性体は物質内部に磁区(magnetic domain)と呼ばれる小磁石を持っている。これらが通常は、相互に打ち消すように配列されていて、外部に向かって磁性を示してはいないが、これに磁界を印加すると磁界が小さい間は磁区同士が絡みついていて動けないが、磁界が強くなるにしたがって磁区が揃いはじめ、すべての磁区が揃ってしまうと、磁界を強めても、磁区の新たな整列はない。このため、磁束密度は増加しない。これが磁気飽和である。

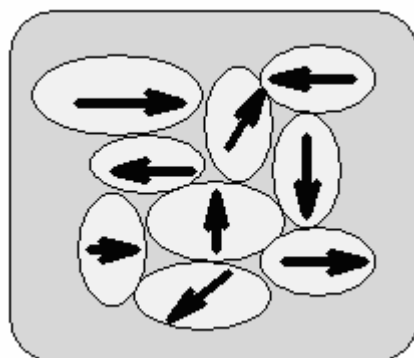


図 7.3 初期磁区

磁区の形状は顕微鏡で見ることができ、強磁性体では、このような磁区が自発的に生じているので、これを自発磁化(spontaneous magnetization)という。磁区が有限の体積全体にわたって形成されると大きな磁気エネルギーをもつことになる。そこで、自然界では、磁区はそれぞれバラバラの向きを取って全体としての磁気エネルギーを最小にする状態となっている。こういう強磁性体に磁界を印加すると、磁性体は、ヒステリシス(Hysteresis)という性質を呈示する。

磁気飽和状態にある磁性体に対し、磁界を弱めてみると、大部分の磁区は揃った状態を維持しているが、さらに磁界を弱め極性を反転すると、磁区は一斉にばらばらな方向を向き始め、さらに、逆極性の磁界が強くなると、最初とは逆方向へ磁区が揃い始める。

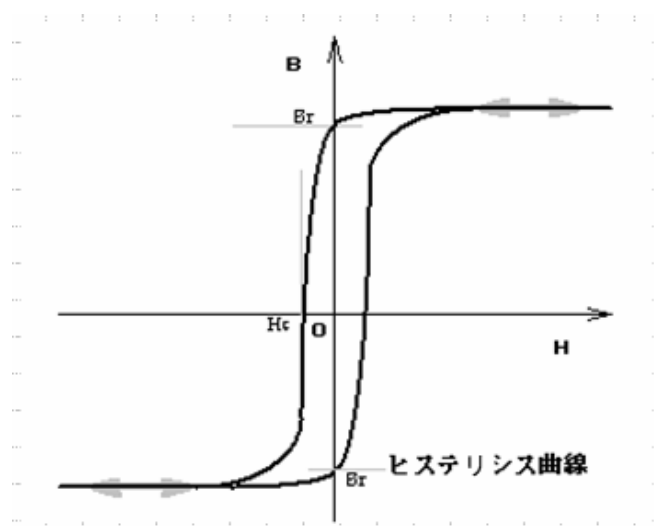


図 7.4 磁気ヒステリシス曲線

同一方向を向いた磁区の数に磁束密度に比例するから、横軸に磁界、縦軸に磁束密度をとると図 7.4 のようになる。これがヒステリシス現象を表す曲線である。

なお、ヒステリシス曲線の中、 $B_r$ は印加磁界  $H$  がゼロにおける磁性体が有する磁束を表すからこれを残留磁束密度という。また、 $H_c$ は、磁性体を減磁して磁石としての性質を無

くすのに必要な磁界で、これが大きいものは磁石としての性質をよく保ち、小さいものは磁石としての機能が小さいことを意味するから、保磁力という。

**ヒステリシス損失** 変圧器など強磁性体の鉄心を使った電気機器では電源に接続していると鉄心が発熱する。発熱の原因は幾つかある。最初はコイルの電気抵抗  $R$  と電流  $I$  によるジュール熱  $RI^2$  である。この損失は大部分のコイルが銅でできているため、銅損 (copper loss) という。導体に時間変化する磁界を加えると誘導電流が流れる。この誘導電流は渦電流 (eddy current) とよばれる電流であり、鉄心中の閉回路を構成して流れる。この渦電流が流れる閉回路ができないように鉄心は薄い鉄板を 1 枚ずつ絶縁して積層構造で作られる。しかし、完全に渦電流をゼロとすることができないため、渦電流による発熱が生ずる。しかし、銅損とこの渦電流損による発熱だけでは鉄心の発熱の全てを説明できない。この説明できない発熱源がヒステリシス損である。

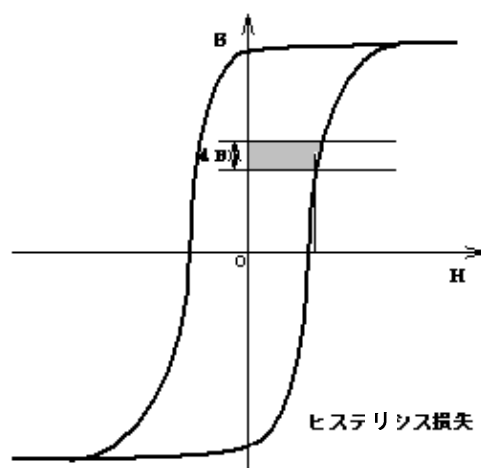


図 7.5 ヒステリシス損

さて、磁界は電流によって生じその単位はアンペア/メートルである。他方、ファラデーの法則が与える単位体積当たりの電圧は、磁束密度が単位面積当たりの磁束であるから、磁束  $\Phi$  が通過する断面積を  $S$  とすれば、磁束密度  $B$  は  $B=\Phi/S$  であるから、ファラデーの法則による単位体積当たりの電圧は  $dB/dt[V/m^2]$  となる。したがって、時間  $dt$  間の単位体積当たりの微小磁気エネルギー  $dw_m$  は、

$$dw_m = \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} dt = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} [J/m^3] \quad (7.7)$$

となる。

したがって、図 7.5 に示すヒステリシス曲線で、斜線部の面積

$$w_m = \int_B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} \quad (7.9)$$

は鉄心の単位体積当たりの磁気エネルギーであり、このエネルギーが鉄心の発熱源となるヒステリシス損失である。(8.9)式の積分をヒステリシス曲線全体にわたって実行すると、この曲線全体が囲む面積は磁性体が磁気エネルギーを蓄えたり放出したりするエネルギーに

対応する。この磁性体に対する磁気エネルギーの入出力はそれぞれ磁区移動を伴うから磁区間の壁（これを磁壁、magnetic wall、という）で摩擦が生じて発熱し、磁性体の熱損失を喚起する。これが、磁気ヒステリシスが鉄心の発熱を促す物理的メカニズムである。

**軟磁性体と硬磁性体** 軟磁性体 (soft-magnetic materials) とは、保磁力と残留磁気が少なく、結果としてヒステリシスループの面積が小さくヒステリシス損が少ない磁性材料をいい、交流の磁界で動作する変圧器や交流電動機などの大部分の電気機器で主要材料となる磁性材料である。鉄に珪素を含有して珪素鋼板やフェライト材などが軟磁性材料である。

硬磁性材料 (hard magnetic materials) とは保磁力が大きく残留磁気が大きく、結果として大きい面積を有する磁気ヒステリシスループを与える磁性材料であり、磁性材料中に蓄えられる磁気エネルギーが大きいため、磁界がゼロであっても残留磁気をもつから電源が不要な磁石、すなわち、永久磁石を構成する材料が硬磁性材料である。アルミ、ニッケル、コバルトを原材料とするアルニコ、レアメタル（稀少金属、サマリウム、ニビジウム）を原材料とするサマリウム・コバルトやニビジウム磁石がある。

## 7. 3 磁気エネルギー、インダクタンス

### 7. 3. 1 磁気エネルギー

いま、磁束密度  $\mathbf{B}$  と磁界  $\mathbf{H}$  の関係が  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$  で与えられるとすれば、

$$\int_B \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = \int_B \mathbf{H} \cdot \mu d\mathbf{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} HB [J/m^2] \quad (7.10)$$

となる。

この式は磁界による単位体積あたりに蓄えられる磁気エネルギーを与える。

### 7. 3. 2 インダクタンス

コイルに交流磁界が鎖交して電圧を誘起する場合、誘起電圧  $e$  は磁束  $\Phi$  と電圧を発生するコイルの巻き数  $N$  に比例するから、ファラデーの電磁誘導の法則は

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.2)$$

と書かれた。

一般に、コイルの巻き数  $N$  と磁束  $\Phi$  の積を磁束鎖交数 (Linkage Magnetic Flux)

$$\lambda = N\Phi [Wb] \quad (7.11)$$

という。

磁束  $\Phi$  がコイルに流れる電流  $i$  によって生ずるから、磁束鎖交数  $\lambda$  は電流に比例する。このため、(7.11)式は

$$\begin{aligned} \lambda &= Li \\ \therefore \lambda &= N\Phi, \Phi \propto i \end{aligned} \quad (7.12)$$

と書ける。

(7.12)式の比例定数をインダクタンス  $L$  (inductance 誘導係数) と呼び、その単位をヘンリー (henry、略して H) である。

いま、インダクタンス  $L$  が一定値であるとすれば、(7.2)式のファラデーの法則は

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} = -L \frac{di}{dt} [V] \quad (7.13)$$

と書き換えることができるから、インダクタンスの単位は、電圧/(電流/時間) = (電圧・時間)/電流 = 磁束 (または磁束鎖交数) /電流、となるから、インダクタンスは単位電流当たりの磁束を与えるパラメータであり、その単位ヘンリーは Weber/Ampere である。

### 7. 3. 3 磁気回路

図 7.6 に示すように一部に切れ目のある断面積  $S$  の磁性体があり、それに  $N$  回の巻き線からコイルになる。コイルに  $I$  [A] なる電流が流れている場合、磁性体内部を貫通する磁束  $\Phi$  を計算することを考える。

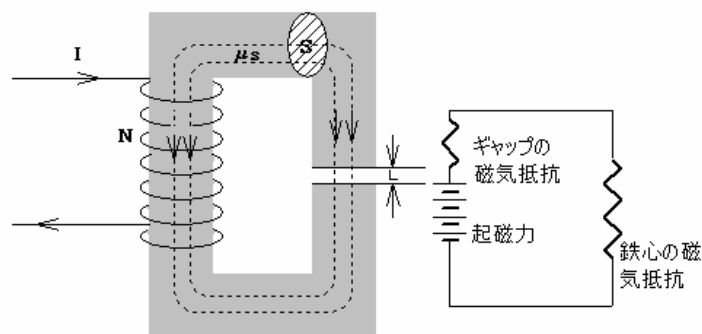


図 7.6 磁気回路

図 7.6 で磁束は鉄心の脚に沿った方向しか流れないと仮定すれば、全体の磁界  $\mathbf{H}$  は、エアギャップ中の磁界  $\mathbf{H}_g$  と鉄心中の磁界  $\mathbf{H}_i$  の和からなるから、

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_g + \mathbf{H}_i \quad (7.14)$$

が成り立つ。

磁束  $\Phi$  はエアギャップ部と鉄心部が直列に繋がっているから同一であり、磁束  $\Phi$  が通る磁路の断面積はエアギャップも鉄心部も同じ  $S$  であるから、磁束密度  $\mathbf{B}$  は

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{S} [\text{Weber} / \text{m}^2, \text{Tesla}] \quad (7.15)$$

であり、これはエアギャップと鉄心部で共通である。

エアギャップと鉄心それぞれの透磁率を  $\mu_0$ 、 $\mu_s$  とすれば、(7.14)式は

$$\mathbf{H}_g = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{B}}{\mu_s} \quad (7.16)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_g + \mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} + \frac{\mathbf{B}}{\mu_s}$$

となる。

また、磁界  $H$  と起磁力  $NI$  の関係は、エアギャップと鉄心それぞれの磁路長を  $l_g$  と  $l_s$  とすれば、

$$\begin{aligned} NI &= \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{l_g} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} + \int_0^{l_s} \frac{\mathbf{B}}{\mu_s} \cdot d\mathbf{l} = \frac{B}{\mu_0} l_g + \frac{B}{\mu_s} l_s \\ &= \left( \frac{1}{\mu_0} l_g + \frac{1}{\mu_s} l_s \right) B = \left( \frac{l_g}{\mu_0 S} + \frac{l_s}{\mu_s S} \right) \Phi \quad (7.17) \\ &= (R_g + R_i) \Phi \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $\Phi = B/S$  であり、

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 S} \quad (7.18)$$

$$R_i = \frac{l_s}{\mu_s S}$$

を磁気抵抗 (magnetic reluctance) と呼び、

$$\text{磁気抵抗} = \frac{\text{磁路長}}{\text{透磁率} \cdot \text{断面積}} \quad (7.19)$$

で定義される。

### 7. 3. 4 自己インダクタンス

(7.11)式によれば、磁束  $\Phi$  とコイルの巻数  $N$  の積である磁束鎖交数  $\lambda$  は電流  $I$  とインダクタンス  $L$  の積であるから、起磁力  $NI$  を与えるコイルの磁束鎖交数  $\lambda$  は

$$\lambda = N\Phi = N \frac{NI}{R_g + R_i} = \frac{N^2}{R_g + R_i} I = LI \quad (7.20)$$

となり、インダクタンス  $L$  は

$$L = \frac{N^2}{R_g + R_i} \quad (7.21)$$

となり、このインダクタンスは自分で作る磁束を自分のコイルが鎖交する度合いを与えるから自己インダクタンス(self-inductance)という。

## 7. 3. 5 相互誘導と相互インダクタンス

磁気的に結合された 2 個の巻線の一方の電流を時間変化させると、もう一方の巻線に誘起電力を生じる。具体的な例として図 8.7 に示す簡単な単相変圧器を考える。

一次巻線の作る磁束は

$$\Phi = \frac{n_1 i_1}{R_i} = \frac{n_1 i_1}{\left( \frac{L}{\mu S} \right)} \quad (7.21)$$

となる。(7.21)式で  $L$  は磁路長を示し、インダクタンスではないことを注意して、この磁束が二次コイルに鎖交する磁束数  $\lambda_{12}$  は、二次コイルの巻数が  $n_2$  であるから、

$$\lambda_{12} = n_2 \Phi = \frac{n_2 n_1 i_1}{R_i} = n_1 n_2 \frac{\mu S}{L} i_1 = M i_1 [\text{Wb}]$$

$$M = \frac{\lambda_{12}}{i_1} [H] \quad (7.22)$$

で与えられる。

(7.22)式で、 $M$  を相互インダクタンス (mutual inductance) という。この相互インダクタンスを使って、ファラデーの法則による二次コイルに誘起する電圧は

$$e_2 = -\frac{d\lambda_{12}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} [V] \quad (7.23)$$

となる。

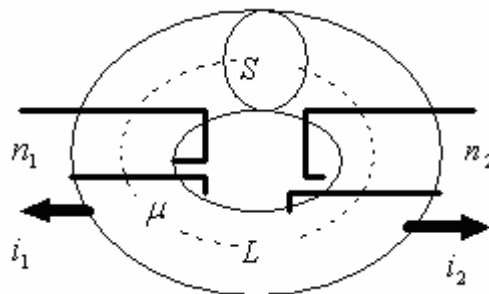


図 7.7 単相変圧器の原理

鉄心に蓄えられる磁気エネルギーとインダクタンスの関係を調べよう。図 7.7 で、一次、二次電流それぞれ  $i_1$ 、 $i_2$  が流れている場合の磁気エネルギーを求めよう。(7.10)式より、

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} \iint_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv = \frac{1}{2} \iint_V \left( \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{L} \right) \cdot \left( \mu \frac{n_1 i_1 + n_2 i_2}{L} \right) dv \\
&= \frac{\mu}{2} \iint_V \left( \frac{n_1^2 i_1^2 + 2n_1 n_2 i_1 i_2 + n_2^2 i_2^2}{L^2} \right) dv = \frac{\mu}{2} \left( \frac{n_1^2 i_1^2 + 2n_1 n_2 i_1 i_2 + n_2^2 i_2^2}{L^2} \right) SL \\
&= \frac{\mu}{2} \frac{n_1^2 S}{L} i_1^2 + \mu \frac{n_1 n_2 S}{L} i_1 i_2 + \frac{\mu}{2} \frac{n_2^2 S}{L} i_2^2 = \frac{1}{2} \frac{n_1^2}{R} i_1^2 + \frac{n_1 n_2}{R} i_1 i_2 + \frac{1}{2} \frac{n_2^2}{R} i_2^2 \quad (7.24) \\
&= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2
\end{aligned}$$

$$\text{但し、} L_1 = \mu \frac{n_1^2 S}{L}, L_2 = \mu \frac{n_2^2 S}{L}, M = \mu \frac{n_1 n_2 S}{L}$$

が成り立つ。

(7.24)式はインダクタンスが磁気エネルギーを蓄える指標を与えることを意味する。

### 7. 3. 5 電磁力

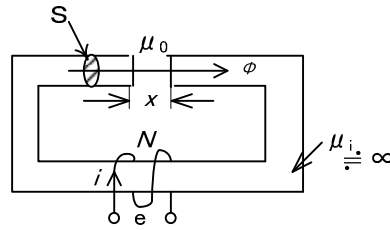


図 7.8 電磁力の計算

図 7.8 で、鉄心部の透磁率はエアギャップのそれよりも十分大きいから鉄心部の磁気抵抗をゼロとみなすと、ギャップ部分の磁気抵抗は、

$$R(x) = \frac{x}{\mu_0 S} \quad (7.25)$$

であるから、磁束は、

$$\Phi = \frac{Ni}{R(x)} [\text{Wb}] \quad (7.26)$$

となる。一方、インダクタンスは、

$$L(x) = \frac{N\Phi}{i} = \frac{N^2}{R(x)} [H] \quad (7.27)$$

である。したがって、ギャップ部分に貯えられる磁気エネルギーは、

$$W_m = \frac{1}{2} L(x) i^2 = \frac{1}{2} N \Phi i = \frac{1}{2} \Phi^2 R(x) [J] \quad (7.28)$$

となり、磁気エネルギー  $W_m$  は位置  $x$  と電流  $i$ 、または、位置  $x$  と磁束  $\Phi$  の関数として表される。

いま、時間  $dt$  に  $dx$  だけ  $x$  が変化したとすると、エネルギー保存側から

$$i \cdot e dt = dW_m + f dx$$

すなわち、

$$\text{入力電気エネルギー} = \text{磁気エネルギーの変化} + \text{外部出力エネルギー} \quad (7.29)$$

である。

ここで、

$$e = N \frac{d\Phi}{dt} \quad (7.30)$$

であるから、

$$f = i \cdot e \frac{dt}{dx} - \frac{dW_m}{dx} = iN \frac{d\Phi}{dx} - \frac{dW_m}{dx} \quad (7.31)$$

が電磁力  $f$  を与えることになる。

独立変数としての  $i$  と  $x$  この場合、

$$W_m(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2 \quad \text{となり、} \frac{di}{dx} = 0 \quad \text{であるから} \quad i \frac{d\Phi}{dx} = \frac{d}{dx}(i, \Phi) \quad \text{と書ける。}$$

$$f = \frac{d}{dx} \{ iN\phi - W_m(i, x) \} = \frac{d}{dx} \left\{ L(x)i^2 - \frac{1}{2} L(x)i^2 \right\} = \frac{dW_m(i, x)}{dx} [N] \quad (7.32)$$

$$\left( \frac{di}{dx} = 0, W_m(i, x) = \frac{1}{2} L(x) i^2 \right)$$

の関係が得られる。

独立変数としての  $\Phi$  と  $x$  この場合、

$$W_m(\Phi, x) = \frac{1}{2} R(x) \Phi^2 \quad \text{となり、} \frac{d\Phi}{dx} = 0 \quad \text{であるから} \quad \Phi \frac{dR(x)}{dx} = \frac{d}{dx} [R(x) \Phi] \quad \text{と書ける。}$$

$$f = iN \frac{d\phi}{dx} - \frac{dW_m(\phi, x)}{dx} = - \frac{dW_m(\phi, x)}{dx} [N] \quad (7.33)$$

$$\left( \frac{d\phi}{dx} = 0 \right)$$

として磁気エネルギーから電磁力が計算される。

## 7. 3 応用機器

### 7. 3. 1 電磁誘導

**誘導加熱** (ゆうどうかねつ) は電磁誘導を利用して加熱すること。英語表記の

Induction Heating を略して **IH** ともいう。高周波誘導加熱、電磁誘導加熱とも呼ばれ

る。新しい調理器具の加熱方式として家庭の中でも普及しつつあり、これを利用した調理器具を **IH 調理器** という。

**原理** 導線に交流電流を流すと、その周りに向き、強度の変化する磁力線が発生する。その近くに電気を通す物質（通常は金属）を置くと、この変化する磁力線の影響を受けて、金属の中に渦電流が流れる。金属には通常電気抵抗があるため、金属に電流が流れると  $\text{電力} = \text{電流}^2 \times \text{抵抗}$  分のジュール熱が発生して金属が加熱される。この現象を誘導加熱という。変圧器や磁気ヘッドのコアに生ずる誘導加熱は損失だが、熱を積極的に利用すれば調理器具等に利用することができる。効率を上げるため、導線をコイル状にするのが一般的である。

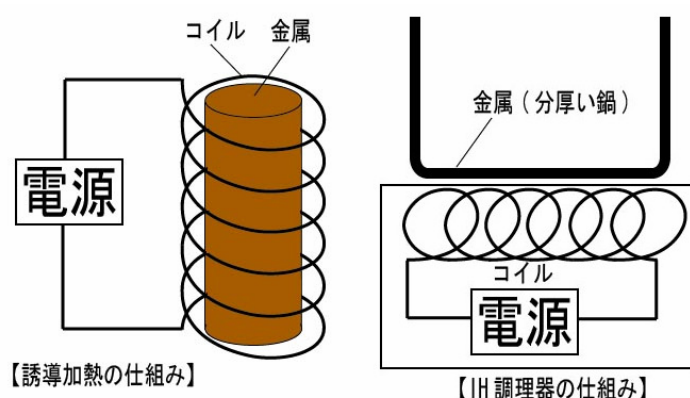


図 7. 9 通常の誘導加熱ではコイルの真中に金属を置くが、IH 調理器の場合は構造上コイルの上に金属が置かれる

**電磁調理器（でんじちょうりき）** は、IH 調理器とも呼ばれ、内部に存在するコイルの電磁誘導と鎖交磁束を利用し、金属を加熱し調理できる機械。ガスや火を使用せず、電気のみで稼動する。一般的には焔炉型をしている調理器具を言うが、IH 炊飯器などの、同じ加熱原理を用いる機器を含めることがある。IH クッキングヒーターと言った場合は焔炉型の調理器を限定して指す場合が多い。

図 7. 10 卓上電磁調理器

電気コンロ同様に燃焼式ではないため、室内の空気を汚さない、及び防火対策の簡略化などのメリットがある。そして安定した加熱管理制御を得意とするため、スープなどの液体の加熱に適している。反面、鍋釜等をガラストップ（コイル）から遠ざけてしまうと、

誘導加熱および鍋釜等の温度検出ができず加熱を停止させてしまうため、フライパンを使った場合に調理ムラを生じ易いといったネックがある。

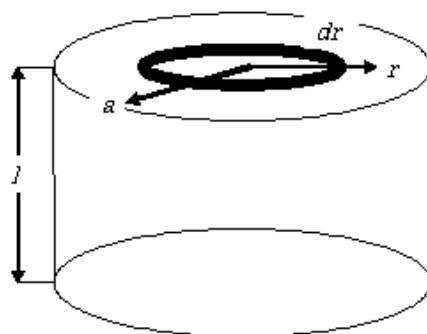
ガスコンロでは炙れたスルメや海苔を炙れなくなってしまった。もっともガスコンロでも鍋検知機能があるものは炙れない。

電磁調理器を従来のガス調理器と比較した場合、誘導加熱であることで以下のような得失がある。

- ・直接加熱であり熱効率が低い。
- ・電熱器で鍋を加熱する場合は熱線放射と加熱空気による伝熱のため、電気エネルギーのロスが生じるが、電磁調理器では原理上このような損失がほとんどなく熱効率が低い (約 83%。尚、ガスコンロは約 55%)。しかし、1 次エネルギーからの変換効率とするとエネルギー効率は低くなる (電気エネルギーは、多くの場合火力エネルギーをさらに変換して得られているため)。
- ・ 炎がない (燃焼しない)。
- ・ コイルに流す電力を制御することによって容易に火力を制御することができる。反面、電磁調理器が作動しているのか分かりにくい (熱を持った調理機器に触れると危険) ため、作動中はランプなどで注意を促す製品が多い。
- ・ 電磁調理器に対応した調理器具 (鍋・フライパン・やかんなど) が必要となる。材質 (基本的にはステンレス鋼や琺瑯などの鉄製)、厚み (出来るだけ肉厚でないと反りやすい、焦げやすい)、形状 (底が平らでないと効率が下がるとともに、安全装置が正常に働かない) が重要となる。電力会社が推奨する鍋は適切な品質で作られているが、高価である上に、底が肉厚のため重く、食材が入った状態で持ち上げるのはそれなりの筋力も必要。
- ・ オールメタル対応と呼ばれる IH コンロの場合は、他の金属の鍋も利用できるが熱効率の低下や安全装置センサー異常を招く恐れがある。・火力はガス調理器と比較して小さい (ただし前述の通り、鍋と密着しているのでエネルギー損失が少なく、ガスと同等以上の高温が得られると電力会社では説明している)。
- ・ 調理後、鍋が接していた部分は鍋底並みに高温なのでやけどなどに注意する。ガスコンロのように高熱になる部分が明確ではないので、「高温注意サイン」として天板へのプリント表示や、光で位置を示す電磁調理器もある。

## 練習問題

(1) 半径  $a$  の円形断面を持つ、長さ  $l$ 、透磁率  $\mu$  の円柱状導線の自己インダクタンスをもとめよ。電流は断面を一様に流れるとし、外部インダクタンスは考えない。



《解答》アンペアの法則より

$$2\pi rH = \pi r^2 J = \pi r^2 \frac{I}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2} I$$

$$B = \mu H = \mu \frac{r}{2\pi a^2} I$$

$dr$  の円環部分の磁束は  $Bldr$  である。導線全部と鎖交するのではなく、鎖交数は全体の  $r^2/a^2$  のに比例するから

$$d\Phi = \frac{r^2}{a^2} Bldr = \frac{r^2}{a^2} \mu \frac{r}{2\pi a^2} I l dr = \mu \frac{r^3}{2\pi a^4} I l dr$$

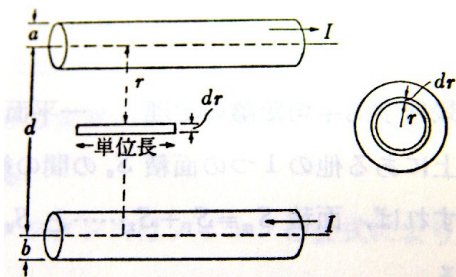
$$L_i I = \Phi = \int_0^a \mu \frac{r^3}{2\pi a^4} I l dr = \frac{\mu}{8\pi} I l [\text{Wb}]$$

したがって内部インダクタンスは導体半径に無関係に

$$L_i = \mu \frac{l}{8\pi} [\text{H}]$$

で与えられる。

(2) 透磁率  $\mu$  で、半径  $a$ 、 $b$  の円形断面を持つ2本の導線が、中心間隔  $d (d \gg a, b)$  で平行往復回路を作るとき、長さ  $l$  あたりの自己インダクタンスを求めよ。



《解答》内部インダクタンスは上の導線の節により、半径に関係なく  $\mu l/8\pi$  であるから

$$L_i = 2 \times \frac{\mu}{8\pi} = \frac{\mu}{4\pi}$$

次に外部インダクタンスについて考える。図のような点での磁界は

$$B = \mu_0 \frac{Il}{2\pi r} + \mu_0 \frac{Il}{2\pi(d-r)}$$

$$\begin{aligned} L_e I = \Phi &= \int_a^{d-b} B l dr = \int_a^{d-b} \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \left[ \frac{1}{r} + \frac{1}{(d-r)} \right] dr = \mu_0 \frac{Il}{2\pi} [\log r - \log(d-r)]_a^{d-b} \\ &= \mu_0 \frac{Il}{2\pi} [\log(d-b) - \log a - \log b + \log(d-a)] = \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \log \frac{d-b}{a} \frac{d-a}{b} \\ &\cong \mu_0 \frac{Il}{2\pi} \log \frac{d^2}{ab} \because d \gg a, b \end{aligned}$$

$$\therefore L_e = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \log \frac{d^2}{ab} [H]$$

以上の結果から、自己インダクタンスは

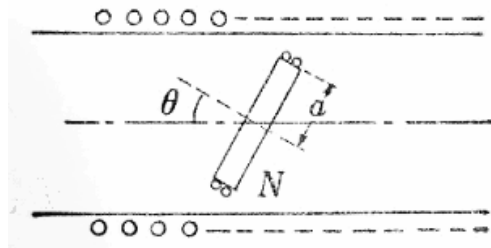
$$\therefore L = \frac{l}{4\pi} \left( 2\mu_0 \log \frac{d^2}{ab} + \mu \right) [H]$$

特に  $a=b$  の時

$$\therefore L = \frac{l}{\pi} \left( \mu_0 \log \frac{d}{a} + \frac{\mu}{4} \right) [H]$$

ただし、電流が導線の表面しか流れていない時は内部インダクタンスがなくなるので自己インダクタンスは  $L_e$  に等しい。

(3) 図のように、単位長当たりの巻数が  $n$  の無限長コイルの中に、半径  $a$  で巻数  $N$  の円形コイルが角度  $\theta$  だけ傾けて置いてある時の相互インダクタンスを求めよ。



《解答》無限長コイルに電流  $I$  を流すと、内部磁界は

$$H = nI$$

であるから、内部コイルとの鎖交磁束数は

$$\lambda = \mu H r a^2 N \cos \theta$$

であるから、相互インダクタンス  $M$  は

$$M = \lambda / I = \mu n N \pi a^2 \cos \theta [H]$$

(4) 断面  $S$ 、磁路の平均長  $l$ 、透磁率  $\mu$  の環状鉄心に巻数  $N_1$  を均一に巻いたときの自己インダクタンスは  $L_1$  である。いま、この磁路に長さ  $\delta$  のギャップを設けるとインダクタンスは小となるから、もとのインダクタンスを得るために巻数  $N_2$  をいくらにすればよいか。

《解答》もとの磁気抵抗、磁束、インダクタンスはそれぞれ

$$R_1 = \frac{l}{\mu S}, \Phi = \frac{N_1 I}{R_1}, L_1 = \frac{N_1^2}{R_1} = \mu \frac{N_1^2 S}{l}$$

であり、ギャップを設けたときの磁気抵抗は

$$R_2 = \frac{l - \delta}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S}$$

であるから、この場合のインダクタンス  $L_2$  は

$$L_2 = \frac{N_2^2}{R_2} = \frac{N_2^2}{\frac{l - \delta}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S}}$$

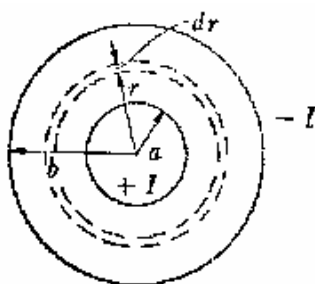
となる。このインダクタンスがもとのインダクタンスと等しくなるには

$$L_1 = L_2$$

$$\therefore \mu \frac{N_1^2 S}{l} = \frac{N_2^2}{\frac{l - \delta}{\mu S} + \frac{\delta}{\mu_0 S}} \quad N_2 = N_1 \sqrt{1 + \frac{\delta}{l} \left[ \frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right]}$$

が条件となる。

(5) 内部導体の半径  $a$ 、外部導体の半径  $b$  の同軸導体の自己インダクタンスを求めなさい。



《解答》図のように内、外導体間に半径  $r$  で厚さ  $dr$ 、長さ単位長の薄い円筒を考え、両導体に往復電流  $I$  が流れるとき、

$$\text{磁界: } H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$\text{磁束: } d\Phi = \mu_0 H dr = \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r}$$

であるから、内、外導体間を通る全磁束、したがって、内部導体との鎖交磁束数は

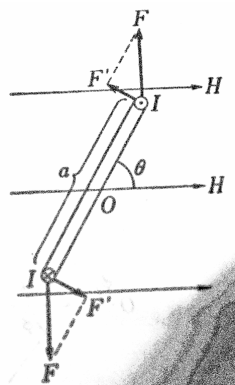
$$L_e I = \Phi = \int_a^b d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

$$L_e = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} [H/m]$$

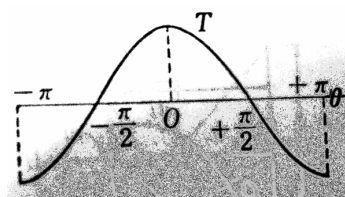
$$L = L_{in} + L_e = \frac{1}{2\pi} \left( \mu_0 \log \frac{b}{a} + \frac{\mu}{4} \right) [H/m]$$

ここで、 $L_{in}$ は導体の単位長当たりの内部インダクタンスである。

(6) 図(a)に示すように巻き数が  $N$  の長方形  $a \times b[m^2]$  のコイルが平等磁界  $H[A/m]$  の中に、磁界に垂直な軸  $O$  のまわりに回転できるように置かれ、コイルに電流  $I[A]$  を流した場合、コイルに作用する回転力を求めよ。



(a)



(b)

《解答》長方形の奥行き  $b$  は紙面に直角であるから図には見えない。コイルの電流は図の通りとする。コイルが  $\theta$  の角に傾いているとき、 $b$  辺は図の  $F$  の力を受け、

$$F = NI\mu_0 Hb [N]$$

コイル面に垂直な分力は

$$F' = F \cos \theta$$

である。したがって、コイルを左回転させるトルクは

$$T = 2 \frac{a}{2} F' = aF' = \mu_0 N I a b H \cos \theta [N \cdot m]$$

$a$  辺に作用する力は両側の  $a$  辺で互いに逆方向であるから回転力にはならない。トルクと  $\theta$  の関係は(b)図のようになり  $\theta = \pi/2$  は安定な静止位置であるが  $\theta = -\pi/2$  は不安定な静止位置であり、 $-\pi/2$  から少し傾けば直ちに  $+\pi/2$  の位置へ動く。

(7) 磁束密度が  $B=30[T]$  の磁界の中に  $I=5[A]$  の電流が流れている長さ  $l=1[m]$  の直線導体を、

磁界の方向に対して平行かつ  $60^\circ$  傾くように置いたとき、この導体に作用する力を求めよ。

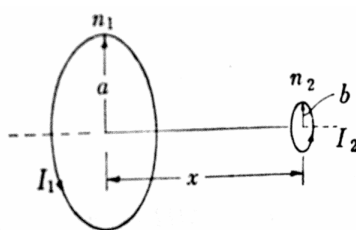
《解答》  $F = IBl \sin \theta = 5 \times 30 \times 1 \times \sin(\pi/3) = 128[N]$

(8) 間隔  $d=4[cm]$  の 2 本の平行な導線に、それぞれ電流  $I=10[kA]$  が流れている場合、導線の単位長当たりの力を  $[kg]$  で求めよ。

《解答》  $F = I \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \frac{I^2}{d} \times \frac{4\pi \times 10^{-7}}{2\pi} = \frac{I^2}{d} \times 2 \times 10^{-7} = \frac{10^2 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-7}}{4 \times 10^{-2}} = 500[N/m]$

$$F = \frac{500}{9.81} = 50.1[kg/m]$$

(9) 図のように 2 個の円形コイルのそれぞれの半径が  $a$ 、 $b$ 、巻数が  $n_1$ 、 $n_2$ 、電流が同方向の  $I_1$ 、 $I_2$  であり、中心の距離  $x$  で同一中心軸に対立している場合、 $b$  コイルが  $a$  コイルから受ける力を求めよ。但し、 $a \gg b$  とする。



《解答》  $a$  コイルから  $b$  コイルの位置に生じる磁界は(7.5)式より

$$H = \frac{n_1 I_1 a^2}{2(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

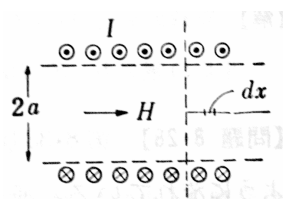
$b$  コイルの鎖交磁束数は

$$\lambda = \mu_0 H \pi b^2 n_2 = \frac{\mu_0 I_1 a^2 \pi b^2 n_1 n_2}{2(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$x$  方向の電磁力は

$$F_x = I_2 \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 a^2 b^2 \pi I_1 I_2}{2} \frac{\partial (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}}{\partial x} = -\frac{3\mu_0 n_1 n_2 a^2 b^2 \pi I_1 I_2 x}{2(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

(10) 図のように単位長あたりの巻数  $n$ 、半径  $a$  の無限長のスプリングに電流  $I$  を流すとき、スプリングの縮まる力を求めよ。



《解答》スプリング内の磁界は(7.13)式から  $H=nI$  で、スプリングの軸方向の長さ  $dx$  における鎖交磁束は  $d\lambda=\mu_0 H \pi a^2 n dx$  であるから、

$$F = I \frac{d\lambda}{dx} = I \mu_0 n I \pi a^2 n = \mu_0 \pi a^2 n^2 I^2$$

## 第 8 章 数学的基礎 2 (ベクトル微積分 Vector Calculus)

### 8. 1 ベクトルとスカラー

#### 8. 1. 1 なぜベクトルか？

諸君は高校でベクトル・スカラーについて学び、そこでは、「ベクトルとは、大きさと方向を持つ量」というように教わり、そして、スカラーについても、「ベクトルが方向と大きさを持つものに対して、スカラーは大きさだけを持つ量」という定義を教わったとする。

ベクトルの定義としてこれは間違いとは言えないが、正確さに難点があり、我々は、ベクトルについて次のように定義するところから始める。

「ベクトルとは、座標軸の回転に対して値を変える量のことである」

そして、ついでに

「スカラーとは、座標軸の回転に対してその値が変わらない量のことである」

ここに、座標軸の回転と言うが、これは数学的には次のように表わされる。いま、図 8.1 のように座標軸(x, y)を角度  $\theta$  だけ反時計方向に回転すると、点 P(x, y) は新しい座標系(x', y')との間に次のような関係が求まる。

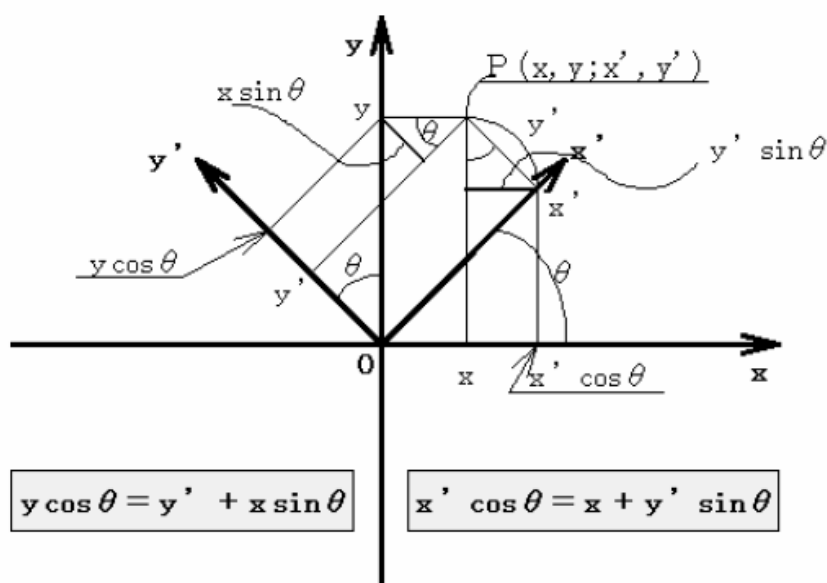


図 8.1 座標軸の回転

$$x' \cos \theta = x + y' \sin \theta$$

$$y \cos \theta = y' + x \sin \theta \quad (8.1)$$

となる。上式の  $x$  を下式に代入して、

$$\begin{aligned}
y \cos \theta &= y' + (x' \cos \theta - y' \sin \theta) \sin \theta \\
&= x' \cos \theta \sin \theta + y' (1 - \sin^2 \theta) \\
&= x' \cos \theta \sin \theta + y' \cos^2 \theta \\
\therefore y &= \frac{x' \cos \theta \sin \theta + y' \cos^2 \theta}{\cos \theta} = x' \sin \theta + y' \cos \theta
\end{aligned}$$

こうして  $z$  軸の周りに角度  $\theta$  だけ回転した座標系間の変換には、

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$z = z' \quad (8.2)$$

なる関係が得られる。この関係を行列で書くと、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

あるいは、

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

と表わすこともできる。

ところで、古い座標系  $(x, y, z)$  で表わされるベクトル  $A$  を新しい座標系  $(x', y', z')$  上で  $A'$  として表現すると、

$$\begin{bmatrix} A_x' \\ A_y' \\ A_z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

なる。すなわち、座標系  $(x, y, z)$  上のベクトル  $A$  は、座標系  $(x', y', z')$  では  $A'$  となり、 $A \neq A'$  となっていることがわかります。このようにベクトルは座標系の回転に対して値が変わる。

これに対して、スカラー量に関して調べる。スカラー関数というのは、たとえば、

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

などと表わされるような関数である。これが、座標の回転に対して、

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

$$= \varphi'(x', y', z') = \varphi' \quad (8.6)$$

つまり、 $\varphi = \varphi'$  のように座標の回転に対して不変な量であるときこれをスカラーという。

以上、ベクトル関数は座標の変換に対してその値が変わるもの、スカラー関数は変わらないものと定義することができる。

## 8. 1. 2 電磁気学にでてくるベクトル演算子

**偏微分** 偏微分とは、たとえば  $A$  が空間座標  $x, y, z$  の関数であるとき、 $A=f(x, y, z)$ 、それぞれの方向に対する変化率を求める演算である。具体的な例として、 $A=a_0 x y z + c$ 、 $c$ ：定数とすれば、

$$\frac{\partial A}{\partial x} = a_0 y z, \frac{\partial A}{\partial y} = a_0 x z, \frac{\partial A}{\partial z} = a_0 x y$$

となる。

**▽演算子**

つぎに定義されるような微分演算子のことをナブラ(nabla)演算子といい、 $\nabla$ と書く。ナブラというのは古代ギリシャの竪琴を意味する。その記号の形が竪琴のような形であるところからきた名前でありそれ以上の深い意味はない。米語では $\nabla$ が逆三角形であるから、デルタ(Delta)の略でデルとも呼ばれている。

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (8.7)$$

この $\nabla$ 演算子との組み合わせで様々な物理的状況を記述することができるので、以下にそれらを紹介しておく。

**勾配(gradient)**

ポテンシャル関数  $\phi$  のようなスカラー関数に対して $\nabla$ 演算子を作用させる。すなわち、

$$\nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (8.8)$$

こういうとき、この微分値を勾配と呼び、ナブラ  $\phi$  とか  $\text{grad} \phi$  と書いて、「グラディエント・ファイ」と読む。通常、例えばスカラー関数  $\phi$  が重力ポテンシャルのようなものと、

$$\mathbf{F} = -\nabla \phi \quad (8.9)$$

と負号を付けて、ベクトルで表現した力（この場合では重力となる）を求めるときなどに使われる。その様子を描いたものが図 8.2 である。勾配演算はスカラー量  $\phi$  をベクトル  $\mathbf{F}$  へ変える演算と考えて良い。

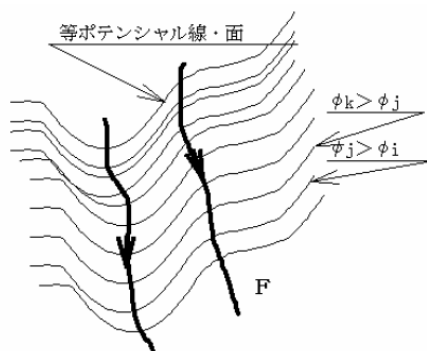


図 8.2 勾配と等高線

**発散(divergence)**

つぎに、 $\nabla$ 演算子をベクトル関数に作用させるとき、 $\nabla$ は定義からしてベクトル演算子であるから、あたかも $\nabla$ とベクトル関数の内積を取るように作用させた場合、「ベクトル関数の発散を取る」という。すなわち、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (8.10)$$

である。

発散演算は(8.10)式から明らかなようにベクトルに対する微分であり、この微分の結果ベクトルはスカラー量に変換される。すなわち、発散演算はベクトル量をスカラー量に変換する演算と考えて良い。

**ガウスの定理 (Gauss's Theorem)**

ところで、図 8.3 のように閉曲面  $S$  を貫通する流束を求めてみる。 $\mathbf{A}$  を流れのベクトルとすれば、 $\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds$  は流束である。ここに、 $\mathbf{n}$  は面  $S$  に垂直な外向き法線 (単位) ベクトルである。

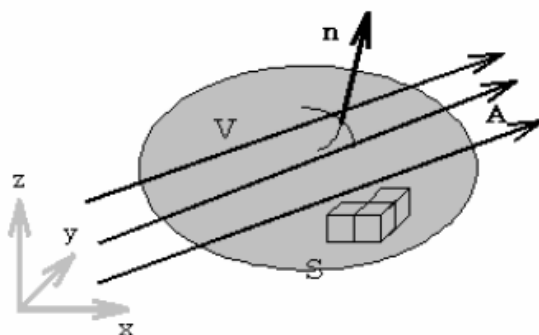


図 8.3 閉曲面からの発散

そこで、この流束を直接求める代わりに体積  $V$  を微小な直方体に分割し、それらの表面を貫通する流束を求めてみよう。この図 8.3 の  $S$  の内部にとった微小な直方体の 1 つを拡大して図 8.4 に示す。

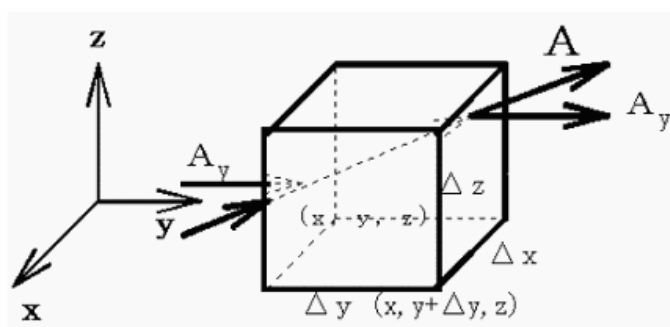


図 8.4 単位立方体からの発散

まず  $y$  軸と垂直な微小面  $\Delta x \Delta z$  面から流出する分を計算してみる。流出量を計算するから左側の面からの流入分は負として計算される。すなわち、

$$\int_S A_y(x, y + \Delta y, z) dS - \int_S A_y(x, y, z) dS$$

がこの場合の流出量である。

いま、 $\Delta y$  が小さいとすれば、テイラー級数を用いて

$$A_y(x, y + \Delta y, z) = A_y(x, y, z) + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + \dots$$

と書ける。ゆえに、 $y$  方向へ垂直な面は  $\Delta x \Delta z$  であるから、 $y$  軸方向の流出量は

$$\int_S A_y(x, y + \Delta y, z) dS - \int_S A_y(x, y, z) dS = \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} \Delta y \Delta x \Delta z$$

となる。

こういう計算を他の 4 つの面についても同じように実行すると、

$$\int_S A_z(x, y, z + \Delta z) dS - \int_S A_z(x, y, z) dS = \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z} \Delta z \Delta y \Delta x$$

$$\int_S A_x(x + \Delta x, y, z) dS - \int_S A_x(x, y, z) dS = \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta z \Delta y$$

となるから、結局、全体としてこの微小直方体の 6 面から流出する量は、

$$\left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。

一般的に閉曲面  $S$  によって囲まれる体積  $V$  について  $S$  を貫通して出て行く流束量を求めよう。内部に微小な直方体を無数に設定し、それらの内部の直方体の表面からの流出量を求めると、 $V$  の内部では隣同士が打ち消し合って、結局  $S$  からの分だけが正味の放出量となるため、

$$\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_i \Delta V_i = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (8.11)$$

なる数学的関係を得る。最後の置き換えはリーマン(Riemann)積分の定義そのものである。これをガウスの定理(Gauss's Theorem)といい、体積分を面積分に変換する定理である。ここに、 $\mathbf{n}$  は面  $S$  に垂直な外向き法線 (単位) ベクトルである。

この定理に従えば、

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (8.12)$$

としたとき、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho dV \quad (8.13)$$

となる。これから分るように、体積  $V$  内に閉じ込められている  $\rho$  という量から発するベクトル  $\mathbf{D}$  があって、それは閉曲面  $S$  から外向きに発散していることを表わしている。それゆえ、(8.12)式は微小な体積を包む微小な閉曲面から外向きに発散する量を  $\nabla \cdot \mathbf{D}$  という形で表わしたことになる。これが「発散」という用語の意味に他ならない。

### 回転(rotation)

$\nabla$  を  $\nabla \times$  のようにベクトル関数に外積のように作用させた場合、「ベクトルの回転を取る」という。すなわち、

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (8.14)$$

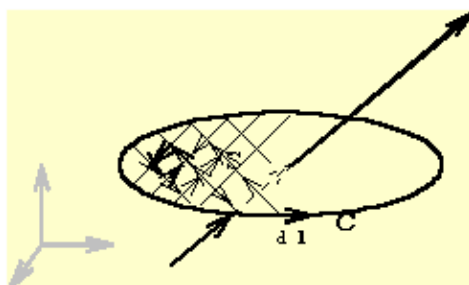


図 8.5 周回積分

### ストークスの定理 (Stokes's Theorem)

図 8.5 のように閉じた曲線  $C$  を考え、この曲線を境界として囲まれた面積を  $S$  として、この  $C$  上及び  $S$  内で微分可能かつ連続なベクトル関数  $H$  を考えたとき、

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.15)$$

の線積分を考える。いま、 $C$  の囲む面積  $S$  の内部を図 8.5 のように無数の長方形に分割する。その微小な長方形の一個を  $x$ - $y$  平面に射影したのが図 8.6 である。

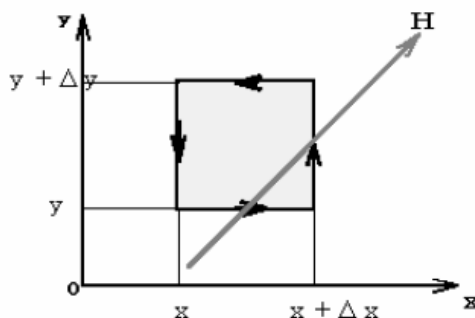


図 8.6 単位セルの周回積分

この図の微小長方形に沿って線積分を実行する。

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= H_x(y) \Delta x + H_y(x + \Delta x) \Delta y - H_x(y + \Delta y) \Delta x - H_y(x) \Delta y \\
 &= H_x(y) \Delta x + H_y(x) \Delta y + \frac{\partial H_y(x)}{\partial x} \Delta x \Delta y - H_x(y) \Delta x - \frac{\partial H_x(y)}{\partial y} \Delta y \Delta x - H_y(x) \Delta y \\
 &= \left\{ \frac{\partial H_y(x)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(y)}{\partial y} \right\} \Delta y \Delta x = (\nabla \times \mathbf{H})_z \Delta y \Delta x
 \end{aligned}$$

ところで、これは周回路の  $x$ - $y$  平面への射影だけを取り上げたが、一般的には全ての平面に射影されるので、それらをまとめて、

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\nabla \times \mathbf{H})_x \Delta z \Delta y + (\nabla \times \mathbf{H})_y \Delta z \Delta x + (\nabla \times \mathbf{H})_z \Delta x \Delta y$$

となる。

この結果を一般的な閉曲線  $C$  に適用するが、微小長方形の隣同志の線積分は相互に反対方向を向いているから、打ち消し合う。最終的に残る曲線は  $C$  に沿う部分だけである。ゆえに、

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N (\nabla \times \mathbf{H})_i \Delta S_i = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{n} dS \quad (8.16)$$

の関係が得られる。これをストークスの定理 (Stokes's Theorem) といい、面積分を線積分に変換する定理である。

いま、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (8.17)$$

の式を例として、この式を(8.15)式へ代入すると、

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (8.18)$$

となる。右辺は面  $S$  を通過している  $\mathbf{J}$  なる量の全量であり、左辺は閉じた曲線  $C$  に沿って回転する  $\mathbf{H}$  の全線積分を表わしている。「回転」という用語の意味はこの意味に他ならない。

## 練習問題

(1) ベクトル  $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$  の時、 $|\mathbf{a}|$ と $|\mathbf{b}|$ を求めよ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad |\mathbf{a}|=\sqrt{4+16+9}=\sqrt{29}, |\mathbf{b}|=\sqrt{9+9+1}=\sqrt{19}$$

(2) ベクトル  $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$  の時、

$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ と $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$ を求めよ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=5\mathbf{i}+7\mathbf{j}+4\mathbf{k}, \mathbf{a}-\mathbf{b}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}, 2\mathbf{a}+3\mathbf{b}=13\mathbf{i}+17\mathbf{j}+9\mathbf{k}$$

(3) ベクトル  $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$  の時、 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ を求めよ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=6+12+3=21$$

(4)  $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ のとき、 $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ と $|\mathbf{a}\times\mathbf{c}|$ を求めよ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \mathbf{a}\times\mathbf{c}=\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}, |\mathbf{a}\times\mathbf{c}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

(5)  $\mathbf{a}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{c}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ のとき、 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ を求めよ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2+3+0=5$$

(6)  $f=xy^2z^3$ のグラディエント演算で勾配ベクトルを作れ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \nabla=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)xy^2z^3=y^2z^3\mathbf{i}+2xyz^3\mathbf{j}+3xy^2z^2\mathbf{k}$$

(7)  $f=xy^2z^3$ で、 $\nabla\cdot\nabla f$ を計算せよ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \nabla f=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)xy^2z^3=y^2z^3\mathbf{i}+2xyz^3\mathbf{j}+3xy^2z^2\mathbf{k}$$

$$\nabla\cdot\nabla f=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(y^2z^3\mathbf{i}+2xyz^3\mathbf{j}+3xy^2z^2\mathbf{k})=2xz^3+6xy^2z$$

(8)  $f = xy^2z^3$ で、 $\nabla \times \nabla f$ を計算せよ。

$$\langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \nabla f = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) xy^2z^3 = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{bmatrix} \\ &= (6xyz^2 - 6xyz^2)\mathbf{i} + (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

$\nabla \times \nabla \phi \equiv 0$  スカラーポテンシャル  $\phi$  は発散成分のみであり、回転成分ベクトルは存在しない。

(9)  $\mathbf{A} = xyz\mathbf{i} + jxy^2z + xy^2z^3\mathbf{k}$ で、 $\nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

$$\begin{aligned} \langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & xy^2z & xy^2z^3 \end{bmatrix} \\ &= (2xyz^3 - xy^2)\mathbf{i} + (xy - y^2z^3)\mathbf{j} + (y^2z - xz)\mathbf{k} \end{aligned}$$

(10)  $\mathbf{A} = xyz\mathbf{i} + jxy^2z + xy^2z^3\mathbf{k}$ で、 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A}$ を計算せよ。

$$\begin{aligned} \langle\langle\text{解答}\rangle\rangle \quad \nabla \times \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & xy^2z & xy^2z^3 \end{bmatrix} \\ &= (2xyz^3 - xy^2)\mathbf{i} + (xy - y^2z^3)\mathbf{j} + (y^2z - xz)\mathbf{k} \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left[ (2xyz^3 - xy^2)\mathbf{i} + (xy - y^2z^3)\mathbf{j} + (y^2z - xz)\mathbf{k} \right] \\ &= (2yz^3 - y^2) + (x - 2yz^3) + (y^2 - x) = 0 \end{aligned}$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$  : ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  は回転成分のみであり、発散成分は存在しない。

## 第9章 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル

### 9.1 スカラーポテンシャル

電界や磁界などの「場」の概念を導入したところで、「ポテンシャル」の概念を導入する。「場」の概念と表裏をなす物理的量として「ポテンシャル」がある。ポテンシャルとは、元来、勢力とか力を表す概念である。場があると、その場がどのような力を内在しているものかを表わす量がポテンシャルであると考えてよい。

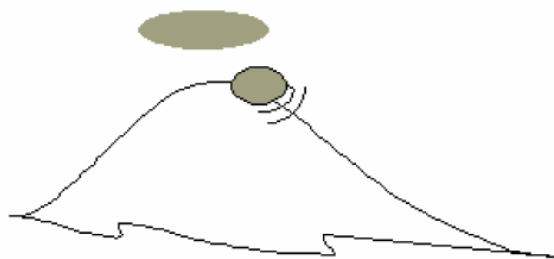


図 9.1 山上の危険な浮き石

最も身近なポテンシャルとしては、重力場のポテンシャルがある。山の頂上にある何の変哲もない石、そんな石なら麓にもいくらでもあるが、頂上の石と麓の石は同じように見えながら、物理的な力としては断然違う。事実、山頂附近の石は、これを転がすと絶壁を掛け下って麓の民家を押し潰すことができる。しかし、麓にある同じような石にはこんな力はない。すなわち、山頂の石と麓の石とは同じ石でもポテンシャルエネルギーが非常に異なる大きさを持っている。この大きな力は、石自身の持っている固有の力ではなく、石のおかれている場所、すなわち空間にその力が宿っているということになる。その意味で、我々が住んでいる地球上は重力ポテンシャルの場であることがわかる。

山頂附近の石はこのように力を蓄えているが、そもそもの源は、造山作用のあった地質時代に地球のプレートの圧力によって山が作られ、そのときにこの石に与えられたエネルギーであったと考えられる。それとも、人間が山頂附近へ運んだのであろう。つまり、この石は自分の力でなく、何らかの他の力によって行われた仕事の結果として、高いポテンシャルエネルギーを保有している。

電荷があるとその周囲の空間に電界を生ずる。電界は場(field)であるからポテンシャルの概念を導入することができる。電界中に電荷を持ってくるとこの電荷はクーロン力を受けるから、電界のある空間もまたポテンシャル場であることがわかる。このような、電界に関わるポテンシャル場を電位場 (electric potential field) と言う。静電界に関連するポテンシャルは比較的馴染みやすいスカラーのポテンシャル (scalar potential) である。

電界中で電界の力に抗して電荷を動かすためには電荷に対して仕事をしなければならぬ。簡単のため、単位電荷  $1\text{ C}$  を考える。この単位電荷を電界中の点 A から B まで径路 C に沿って動かす仕事量  $W$  は

$$W = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.1)$$

となる。負号は、電界に逆らってなす仕事を意味する。

さて、この仕事は点Aから点Bに至る径路に依存せずA点とB点の位置にのみ関係する。したがって、図9.2に示すようにAからBに至るのに径路 $\Gamma$ を行くか、 $\Gamma'$ を経るかは無関係である。

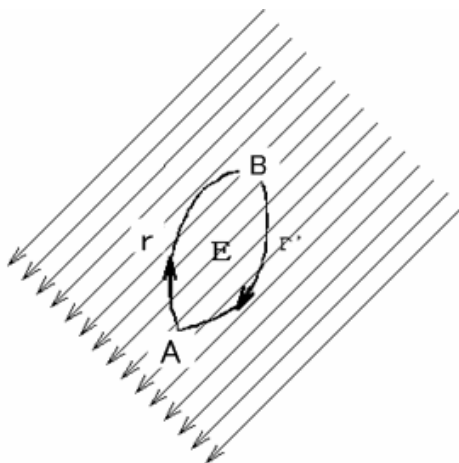


図 9.2 電界中の電荷を運ぶ仕事

すなわち、

$$W = -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\Gamma'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.2)$$

である。

したがって、単位電荷を静電界中で移動し、最終的に出発した位置へもどれば仕事はしないことになる。すなわち、

$$W = \int_{\Gamma+\Gamma'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (9.3)$$

となる。ところが、

$$\int_{\Gamma+\Gamma'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (9.4)$$

がなりたつ。

よって、

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (9.5)$$

がなりたつ。このようなベクトルの場のことを「渦無しの場合(irrotational field)、渦がないから場の回転成分がゼロ」という。これは渦の無いのが静電界の特徴といえる。

## 9. 2 スカラーポテンシャル (Scalar Potential)

渦無しの場合のことをスカラーポテンシャル場ともいうことがある。重力場はその典型的

なものである。静電界も重力場とよく似た特性を持っている。

ところでベクトル数学の理論から、

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (9.6)$$

なる関係がある。証明は簡単であり、以下に示す。

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right] + \mathbf{j} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right] + \mathbf{k} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに、静電界について、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (9.7)$$

と置けば、(9.5)式を自動的に満足する。(9.7)式の  $\phi$  をスカラーポテンシャル (scalar potential) または電位関数などという。

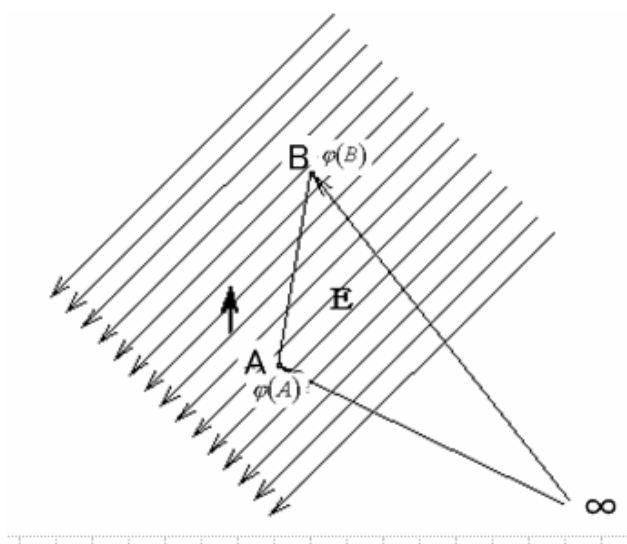


図 9.3 静電ポテンシャルの定義

(9.7)式から、

$$\phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (=W) \quad (9.8)$$

いま、無限遠点のポテンシャルの基準ゼロポテンシャルと仮定すると、点 A と B のポテ

ンシヤルは、

$$\phi(A) = -\int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad \phi(B) = -\int_{\infty}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

であるから、

$$\phi(A) - \phi(B) = -\int_{\infty}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\infty}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\infty}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.9)$$

となる。この値を点Aと点Bの間の電位差または電圧と呼び、[V=volt]を単位として用いる。

V、ボルト (Volt) なる単位は、電池の発明者ボルタを記念して付けられた呼び方である。

ボルトは単位電荷を無限遠点からクーロン力に抗してなされた仕事であるから Joule/Coulomb の単位を持つ。換言すれば、電圧は単位電荷当たりのエネルギーである。

ところで、電荷を含む空間中の電束密度  $\mathbf{D}$  と電界  $\mathbf{E}$  の関係は

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = -\epsilon_0 \nabla \phi$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \oint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \oint_V \rho dv: \text{ガウスの定理} \quad \therefore \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

であるから、ポテンシャル関数としては、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9.10)$$

なる方程式を満足する。この微分方程式をポアソンの方程式(Poisson's equation)といい、静電界は全てこのポアソンの方程式で支配される。

### 9. 3 簡単な電荷形状の電位

#### 9. 3. 1 球状電荷による電位

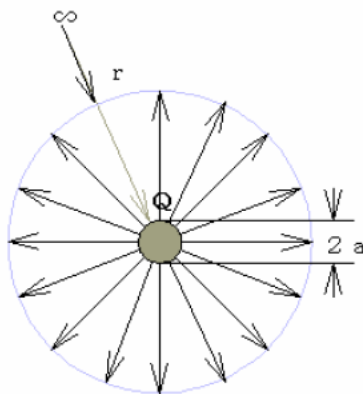


図 9.4 球状電荷の作る静電界

半径  $a$  の球内に電荷が密集しているときの周囲の電界は、球の中心からの距離  $r$  が  $a$  より大きいところで、

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{n}_r, \quad r \geq a$$

で与えられる。これを(9.8)式に代入すると、

$$\phi = -\int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.11)$$

ここで、いま図 9.5 のように球状電荷の外側に球殻を設け、この電位を基準にして球の電位を与えるとすれば、

$$\phi_{ab} = -\int_b^a \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

となる。この式で、括弧内はモデルの幾何学的形状を表わし、 $4\pi\epsilon_0$ は球形形状と媒質の性質を表わし、これに電荷  $q$  がかかっている。

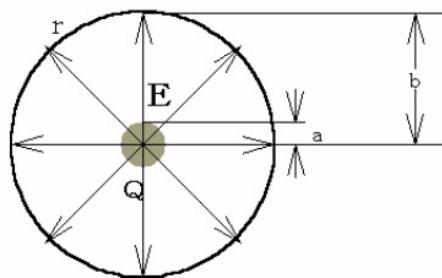


図 9.5 球殻の中のポテンシャル

### 9. 3. 2 線状電荷による周囲の電位

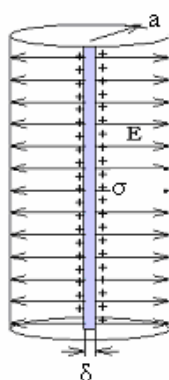


図 9.6 線状電荷の作る静電界

図 9.6 に示すように太さ  $\delta$  の無限長線路があつて、これに線電荷  $\sigma$  [C/m] があるときの周囲電界は、

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{n}_r$$

である。線路の中心軸から  $r$  の距離の電位は、

$$\phi = - \int_{\infty}^r \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{n}_r \cdot d\mathbf{r}$$

であり、図のように同軸状の半径  $a$  の外筒がある場合は

$$\phi = - \int_a^{\delta} \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{n}_r \cdot d\mathbf{r} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{a}{\delta} \quad (9.12)$$

と電位差が表わされる。

ここでも両電極間の電位差は電荷  $\sigma$  と  $2\pi\epsilon_0$  (円形の幾何学的形状に関する量と物性定数) で表わされている。

### 9. 3. 3 平板状電荷による周囲の電位

このときの電界は、平板上の電荷の面密度を  $\sigma$  とすれば、ガウスの定理により電界は表面電荷密度を  $\epsilon_0$  で割った値に等しいから、

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}_r$$

である。よって電位は

$$\phi = - \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}_r \cdot d\mathbf{r}$$

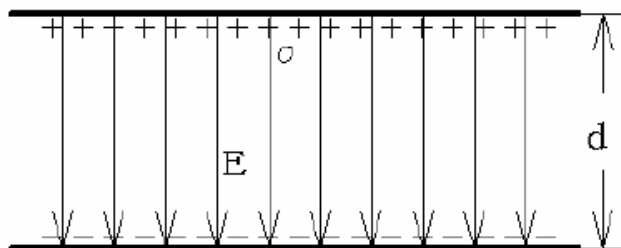


図 9.7 平行平板電極間の静電界

よって、図 9.7 のように間隔  $d$  の無限平板が対向して設置されている場合、両電極間の電位差は、

$$\phi = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (9.13)$$

と得られる。ここでも、 $d$  が幾何学的形状を、 $\epsilon_0$  が媒質の性格を、 $\sigma$  が電荷を表わしている。

## 9. 2 ベクトルポテンシャル

### 9. 2. 1 ビオ・サバールの公式

ファラデーの法則を考える。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \oint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (9.14)$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

磁束密度に対して

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (9.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

なる関係がある。この関係へガウスの定理を適用すれば、

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dv = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

であるから、閉曲面  $S$  を通過する磁束の総和はゼロであること、すなわち、閉曲面に入る磁束は必ず閉曲面の他の部分から出ていることを意味する。

ところで、

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0 \quad (9.16)$$

なる恒等式が成立する。

【証明】

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \\ &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

いま、磁束密度を次式で定義すれば、(9.16)式から(9.15)式を自動的に満足する。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (9.17)$$

これは磁束密度  $\mathbf{B}$  に代わって  $\mathbf{A}$  という量を使っても磁界が表現できるということを表す。こういう関係は、静電界で、電界  $\mathbf{E}$  の代わりに  $\phi$  (電位関数またはスカラーポテンシャル) を用いて表現したものと全く同じある。ただし、ここで用いている関数がベクトルであることが異なるだけである。このため、 $\mathbf{A}$  をベクトルポテンシャル(vector potential)という。

アンペアの法則を考える。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (9.18)$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

(9.18)式の最後の式の磁界  $\mathbf{H}$  へ  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$  を代入し、磁束密度を(9.17)式のベクトルポテンシャルで表せば、

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = \nabla \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (9.19)$$

なる結果を得る。ここで、ベクトルの公式で、

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \\ &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left[ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] + \mathbf{j} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] + \mathbf{k} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] \\ &= \mathbf{i} \left[ \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] + \mathbf{j} \left[ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right] + \mathbf{k} \left[ \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right] \\ &= \mathbf{i} \left[ \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} \right] - \mathbf{i} \left[ \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right] + \mathbf{j} \left[ \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} \right] - \mathbf{j} \left[ \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \right] + \mathbf{k} \left[ \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} \right] - \mathbf{k} \left[ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right] \\ \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\mathbf{i} A_x + \mathbf{j} A_y + \mathbf{k} A_z) \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) - \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} \right) \\ &\quad - \mathbf{i} \left( \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) - \mathbf{j} \left( \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) - \mathbf{k} \left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \\ \therefore \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \end{aligned}$$

なる関係で、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (9.20)$$

を仮定すると、(9.19)式は

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (9.21)$$

となる。この式はベクトル式であるから、成分別に分けて書くと

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \quad (9.22)$$

となる。(9.22)式の解は

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{x', y', z'} \frac{J_x(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ A_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{x', y', z'} \frac{J_y(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{x', y', z'} \frac{J_z(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (9.23)$$

となる。これらを(9.21)式へ代入すると、ベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  が求まる。

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{x', y', z'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \quad (9.24)$$

こうして求められたベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  を使って(9.17)式から磁束密度  $\mathbf{B}$  を求めてみる。

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{x', y', z'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{x', y', z'} \nabla \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right\} \times \mathbf{J}(x', y', z') dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (9.25)$$

ここで、 $\nabla$  記号は  $(x, y, z)$  についての微分であるから  $\nabla \times \mathbf{J}(x', y', z')$  などの微分は 0 になるから省略している。ところで、

$$\begin{aligned}
& \nabla \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right\} \\
&= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\
&+ \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\
&+ \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\
&= - \frac{1}{\left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left[ \mathbf{i}(x-x') + \mathbf{j}(y-y') + \mathbf{k}(z-z') \right] \\
&= - \frac{\mathbf{r}}{r^3}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

ここに  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  はそれぞれ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向の単位ベクトルを表している。(9.26)式を(9.25)式へ代入すると、

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{x', y', z'} \frac{\mathbf{J}(x', y', z') \times \mathbf{r}}{r^3} dx' dy' dz', \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \tag{9.26}$$

ここで、 $r$  は、 $(x', y', z')$  から  $(x, y, z)$  に向かう位置ベクトルを表わす。この式はビオ・サバールの公式 (Biot-Savart's Law) である。

#### 6. 2. 5 円形電流の作る磁界

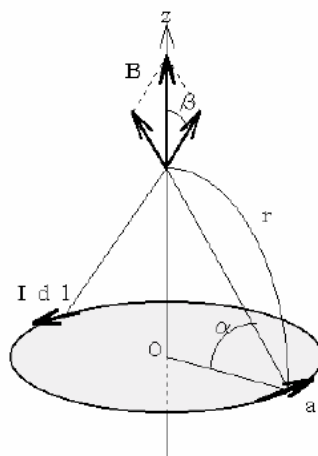


図 9.4 円形電流の作る磁界

ビオ・サバールの公式の応用として、図 9.4 のように半径  $a$  で電流  $I[\text{A}]$  の流れている円形

電流があるとして、それが作る中心軸上の磁界を求めてみる。中心軸に限定したのは、そこから外れた場所では計算が単純な関数では表現できないためである。

さて、観測点  $P(0, 0, z)$  における磁束密度のうち  $Idl$  なる電流素片によって生ずる  $dB$  をビオ・サバールの公式から計算すると、

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \mathbf{r}}{r^3}$$

となる。

この場合、いま考えているのと対称の位置にある電流素片の作る磁束密度をベクトルのに合成すると中心軸の方向を向くものしか残らないので、

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl r}{r^3} \cos \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl r}{r^3} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl r}{r^3} \sin \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl r}{r^3} \frac{a}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl a}{r^3}$$

となる。これを円形電流一周にわたって積分すると、

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I 2\pi a a}{r^3} = \frac{\mu_0 a^2}{2r^3} I \quad (9.27)$$

となる。

もし、観測点がコイルの中心点にあれば、 $r=a$  として

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (9.28)$$

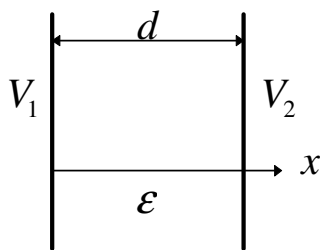
となる。

## 練習問題（やや難しい）

(1) 電極間の間隔  $d$  の平行板キャパシタンスの極板間に  $\epsilon$  の誘電体があるとき、単位面積当りのキャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{\epsilon}{d}$$

で与えられることを Laplace の方程式を使って証明せよ。



《解答》図のような座標系で考えると、 $y$ 、 $z$  方向には電界が存在しないから、

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

であるから、積分すると、

$$\frac{\partial V}{\partial x} = A: \quad \text{Const}$$

さらに積分して、

$$V = Ax + B$$

が得られる。さらに、

$$x=0 \rightarrow V=V_1, \quad x=d \rightarrow V=V_2$$

であるから、

$$V_1 = B, \quad V_2 = Ad + B$$

より、

$$V = \frac{V_2 - V_1}{d}x + V_1$$

となる。ところで、電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

であり、電束密度は  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  であり、表面電荷密度  $\rho [C/m^2]$  に等しいから

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon \frac{V_1 - V_2}{d} = \rho$$

より、単位面積当りのキャパシタンス  $C$  は

$$C = \frac{\rho}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon}{d} \quad [F / m^2]$$

となる。

(2) 電荷  $Q$  が一様に分布している半径  $r$  の球外での電位  $V$  が次式で与えられる。

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

この電位  $V$  が Laplace の方程式

$$\varepsilon \nabla^2 V = 0$$

を満足することを示しなさい。但し、 $\varepsilon$  は誘電率である。

《解答》電位  $V$  は半径方向のみに対して変化するから、満足すべき Laplace の方程式は球座標系で半径方向  $r$  のみを考えれば、次式となる。

$$\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \varepsilon \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

となる。

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon r^3}$$

であるから、代入して、

$$\varepsilon \frac{2Q}{4\pi\varepsilon r^3} - \varepsilon \frac{2}{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} = 0$$

であるから、Laplace の方程式を満足する。

(3) 二次元磁界系と軸対称磁界系におけるベクトルポテンシャルはクーロンゲージ (Coulomb gauge)  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  を満足することを示しなさい。

《解答》 $x, y$  二次元座標系の磁束密度は  $x, y$  の関数であり、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \mathbf{j}$$

より  $z$  方向のベクトルポテンシャル  $A_z$  も  $x, y$  のみの関数であり、 $z$  方向には一定値である。

従って、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

となり、クーロンゲージが成り立つ。同様に、円筒座標系の角度方向のベクトルポテンシャル  $A_\theta$  も半径  $r$  と高さ  $z$  の関数であり、角度  $\theta$  方向には一定値であるため、クーロンゲージを満足する。すなわち、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} = 0$$

である。

(4) 半径  $a$  の無限に長い円筒形導体に電流密度  $\mathbf{J}$  が断面に均一に分布して軸方向へ流れているときの磁界をベクトルポテンシャルを使って求めなさい。

《解答》ベクトルポテンシャルは電流と同じ軸方向の成分  $A_z$  しか存在しないとする。また、このベクトルポテンシャルは  $z$  方向へ一定値をとるからクーロングージ  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  が成り立つ。よって、円筒座標系の支配方程式は、

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} = -\mu J$$

となるが、角度  $\theta$  方向にたいしても  $A_z$  は一定値であるから、導体中に対して

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\mu J$$

が成り立つ。導体の外側では

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0$$

が成り立つ。導体中のポアソン (Poisson) の方程式を満足する解の形は

$$A_z = C_1 \ln r - C_2 r^2$$

となるが、右辺第1項は原点  $r = 0$  で無限大となるから、 $C_1 = 0$  であり、第2項を代入すると、

$$-2C_2 - 2C_2 = -\mu J$$

より、 $C_2 = \mu J / 4$  となる。従って、導体内のベクトルポテンシャルは

$$A_z = -r^2 \frac{\mu J}{4} = -\frac{\mu I}{4\pi} \left( \frac{r}{a} \right)^2, \quad I = \pi a^2 J$$

となる。磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta = \frac{I}{2\pi a^2} r \mathbf{j}_\theta$$

となる。導体外の偏微分方程式を満足する解は

$$A_z = C_3 \ln r + C_4$$

である。 $r = a$  における磁界  $\mathbf{H}$  は

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\theta \Big|_{r=a} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{a} C_3 \mathbf{j}_\theta$$

となり、これは導体内の磁界

$$H \mathbf{j}_\theta \Big|_{r=a} = \frac{I}{2\pi a} \mathbf{j}_\theta$$

と等しくなければならないから、 $C_3 = -\mu_0 I / (2\pi)$  となる。他方、導体内と導体外のベクトルポテンシャルは  $r = a$  で等しいから、

$$-\frac{\mu I}{4\pi} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a + C_4$$

が成り立つ。よって、

$$C_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln a - \frac{\mu_r}{2} \right)$$

となるから、

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \ln r - \ln a + \frac{\mu_r}{2} \right)$$

として、導体外のベクトルポテンシャルが求められる。従って、導体外の磁界は

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial r} \mathbf{j}_\vartheta = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{j}_\vartheta$$

となる。

## 第 10 章 電磁波

## 10. 1 電荷と電流の保存則

## 10. 1. 1 RC 回路の過渡現象

図 10.1 の RC 回路を考える。キャパシタ  $C$  には電荷はゼロであり、非充電の状態とする。

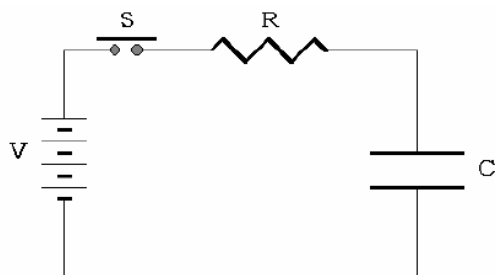


図 10.1 RC 回路の過渡現象

スイッチを時刻  $t = 0$  において投入した後のこの回路に流れる電流を計算する。この回路に対する方程式は次式で与えられる。

$$Ri + \frac{q}{C} = V \quad \text{or} \quad R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (10.1)$$

よって、

$$R \frac{di}{dt} = -\frac{i}{C} \quad \text{or} \quad \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt \quad (10.2)$$

$$\therefore \log i = -\frac{1}{RC} t + K \quad i = k \epsilon^{-\frac{1}{RC} t}$$

となる。 $k$ 、 $K$  は積分定数である。時間  $t=0$  に於いてキャパシタ  $C$  には電荷は存在しないから、キャパシタの端子電圧がゼロである。ゆえに、

$$t=0 \rightarrow Ri = V \quad \text{or} \quad i = \frac{V}{R} = k \epsilon^{-\frac{1}{RC} t} \Big|_{t=0} \rightarrow k = \frac{V}{R} \quad (10.3)$$

$$\therefore i = \frac{V}{R} \epsilon^{-\frac{1}{RC} t}$$

となる。

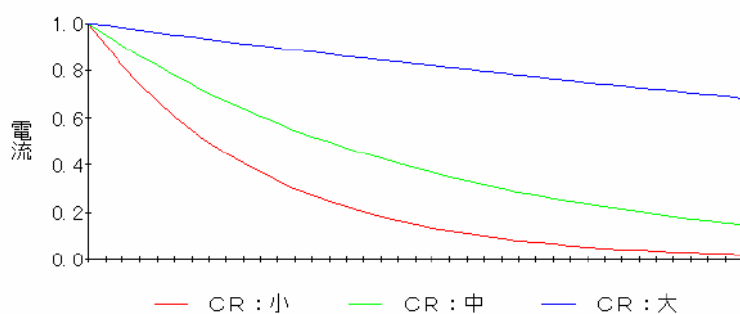


図 10. 2 過渡電流の変化

図 10.2 は幾つかの RC に対して電流  $i$  を計算した結果である。抵抗  $R$  とキャパシタ  $C$  の直列回路である図 10. 1 には、図 10.2 に示すように電流が時間に対して変化する限り電流が流れ、キャパシタの端子電圧が電源電圧  $V$  に等しくなると電流は流れない。キャパシタは絶縁物である誘電体を電極で挟む構造であるから、絶縁物中を電流が時間変化する限り電流が流れることを意味し、絶縁物の定義が良く判らなくなる。

初めにキャパシタは電荷を蓄積して無い。そこへ直流電圧が印加されたので、その電圧  $V$  に見合う電荷  $q (=CV)$  を蓄積することができる。しかし、抵抗  $R$  が直列に接続されているから電流は無制限に流れることが出来ず、電源電圧  $V$  とキャパシタ端子電圧間の差の電圧を抵抗  $R$  で割った電流が流れる。キャパシタに流入する電流は最初は多いが、段々少なくなっていく、こうして電荷がキャパシタへ蓄積され、最終的にキャパシタの端子電圧が電源のそれと等しくなったときに電流の流入がゼロとなる。これが絶縁物を介してこの回路に電流が流れる過程である。

電荷と電流の関係は  $i=dq/dt$  である。図 10.3 に示すようにキャパシタの一方の電極を囲む閉曲面を考え、この閉曲面に流れこむ電流を考えると、

$$i = -\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds \quad (10.4)$$

ここに負号は電流が閉曲面内部に流入しているから法線ベクトル  $\mathbf{n}$  と逆方向であるためである。

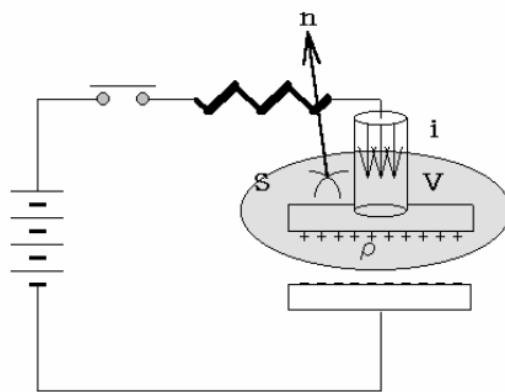


図 10.3 電流の連続性と電荷の保存

また、電荷は同じ閉曲面においては、その内部の空間  $V$  中に蓄えられる電荷の総量であるから、

$$q = \int_V \rho dv \quad (10.5)$$

が成り立つ。

よって、 $i=dq/dt$  の両辺へ(10.4)式の電流  $i$  と(10.5)式の電荷  $q$  をそれぞれ代入すれば

$$i = \frac{dq}{dt} = -\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_s ds = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \quad (10.6)$$

を得る。この式へガウスの定理を適用すれば、

$$\begin{aligned}
 -\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_s ds &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv & \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_s ds &= \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}_s ds : \text{ガウスの定理} \\
 -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv & \therefore \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{10.7}$$

の関係を得る。この式は、閉曲面内に流れ込む電流があれば、それは閉曲面で囲まれた空間内の電荷の増加につながることを意味する。

図 10.4 に示すように、これは、電荷をダムの水量、電流を水流と考えれば、ダムとダムに流れ込む川との関係と同じである。ダムに川が流れ込むとそれはダムの水量の増加となり、ダムからの放水は下流の川の流れになる。ダムはキャパシタに相当する。

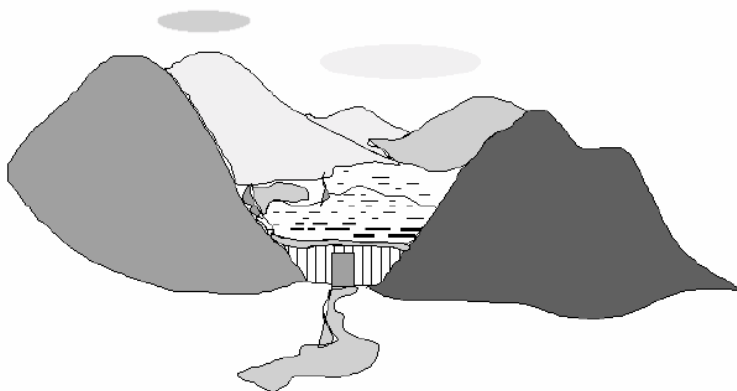


図 10.4 川の連続性とダムの水の保存

水は水量と流れの二つの形態をとる。これと同様に電荷と電流で二つの形態をとる。ダムのモデルで考えると、水は貯えられて水量の形態を取るが、水流となって流れ出れば水量も減る。言い換えれば、流れ込む水量をプラスとし、流れ出る水量をマイナスとすれば、その代数和は一定である。これを水の保存則と言うが、これと同様に電荷も保存量である。電荷が保存されるためには、流れ込む電流と出て行く電流の代数和は常に一定である必要がある。すなわち、電流の流れ込む量と流出する電流は常に等しい。これを電流の連続則と言ひ、電気回路の節点則、すなわち、任意の節点に流れ込む電流の総和はゼロ（流れ込んだ電流と流れ出た電流は等しい）を与える。

このように考えれば、電荷はキャパシタから流れ出したり流れ込んだりという形で常に保存されていると見ることができる。また電流はキャパシタでも連続していなければならない。前者を電荷保存則(charge conservation law)、後者を電流連続則(current continuity law)という。

## 10. 2 変位電流

### 10. 2. 1 電流の連続則と変位電流

電流連続という観点から図 10.1 の電気回路を考える。まず、電源から供給された電流は

導線中を流れてキャパシタの正極に達する。ここまでは導体中を流れるから伝導電流として流れていることになる。しかし、キャパシタの電極間は絶縁物である誘電体で構成されているから伝導電流としては流れることができない。電流連続則を勘案すれば、絶縁物中でも流れる電流を考えなければならない。このため、キャパシタ中を流れる電流としてマクスウェルは変位電流という形で絶縁体中でも電流の流れがあると仮定した。

マクスウェルは、電束密度の時間微分に相当する変位電流密度を定義することによって電流の連続性は保証されるとした。

これを理論的に考えてみよう。

$$\int_s \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_v \rho dv \quad (10.8)$$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

(10.8)式の電荷密度  $\rho$  を(10.7)式に代入する。

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{d}{dt} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (10.9)$$

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad \therefore \mathbf{J} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

(10.9)式は電流連続則の一般的な表現である。このようにして、マクスウェルにしたがって電流を拡張すると、もはや拡張された電流は真空中でさえも流れることができることになる。さらに、マクスウェルは、拡張された電流もアンペールの法則にしたがって磁界を作るものと仮定した。すなわち、

$$\int_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \because \text{ストークスの定理} \quad (10.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

である。これを**マクスウェルの第1方程式**という。アンペールの法則はこうして拡張されました。すなわち、電線を流れる電流だけでなく、真空中を流れる変位電流も磁界を作る。このようにして、初めて真空をも媒体とする物理体系が確立されたことになるが、この式の妥当性は実験によらなければならない。

### 10. 2. 1 電磁波の発見

1864年にマクスウェルは、こうして真空中を流れる電流というおよそ荒唐無稽な仮説を提唱することによって衝撃を与えた。1864年は、米国では南北戦争の翌年であり、日本では徳川政権と長州藩が盛んに睨み合いをしている文字どおり「夜明け前」の時期である。マクスウェルの仮説は純粹に数学的であった。それは、(10.10)式のようにアンペールの法則を拡張し、これを真空中に適用すると逆に伝導電流が消えて、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.11)$$

となる。この式は、ファラデーの法則から導かれる **マックスウェルの第2方程式**

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (10.12)$$

$$\therefore \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

とが、全く同一形式の方程式になる。

(10.11)式の両辺の回転演算をすると、

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{D} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \epsilon \mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H} \right) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (10.13) \\ &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{if } \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

(10.13)式の最後の同次方程式を磁界  $\mathbf{H}$  の波動方程式という。波動方程式の解は  $f(\mathbf{v}t - x)$  または  $f(\mathbf{v}t + x)$  の形を持つ。時刻  $t$  が変化した量と位置  $x$  が変化した量が等しければ関数値  $f$  は常に同じ値を持つ。これは同一関数が時間  $t$  の変化と同時に位置  $x$  が移動することに対応する。例えば、磁界  $\mathbf{H}$  の波動方程式の解を

$$H = H_m \sin(\omega t - \tau x) \quad (10.14)$$

とし、磁界の波動方程式の  $x$  成分のみを考えれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= -\tau^2 H_m \sin(\omega t - \tau x) + \omega^2 \epsilon \mu H_m \sin(\omega t - \tau x) \\ &= (-\tau^2 + \omega^2 \epsilon \mu) H_m \sin(\omega t - \tau x) \quad (10.15) \end{aligned}$$

$$\text{If } \tau = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (-\tau^2 + \omega^2 \epsilon \mu) H_m \sin(\omega t - \tau x) = 0$$

であるから、(10.14)式は波動方程式の解である。(10.14)式で、 $\omega t - \tau x = \pi/2$  を満足する時間  $t$  と位置  $x$  では磁界は最大値  $H_m$  を取る。これは時刻  $t$  の経過と共に位置  $x$  が移動することを意味し、波動以外のなにものでもない。

(10.13)式と同様に電界  $\mathbf{E}$  に対しても

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \text{If } \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0\end{aligned}\tag{10.16}$$

が成り立つ。この式は電界  $\mathbf{E}$  の波動方程式である。こうして、電磁界は電磁波と呼ばれる波になって遠くに伝播して行く可能性が予測される。

マックスウェルの予言から、ドイツ人のヘルツ(Hertz)は電磁波の存在を確かめるための実験を行った。ヘルツの実験は次のようである。図 10.5 に示すように、イグニッションコイルによって高電圧を発生させる。これを先端を尖らせた針端ギャップに導く。ギャップでは、1 cm 当り 1 万 V の電圧が掛けると空気の絶縁が破壊し、針端から放電が起る。放電は、電流であるから、これによって磁界が起る。生じた磁界は時間的に変動する。変動する磁界は時間的に変化する電界を作り、時間的に変動する電界は、変位電流ですが、変位電流は磁界を作る。ヘルツは、このような一連の電磁界の連鎖が空間的な広がりをもって伝播して行くのを電磁波と考えた。

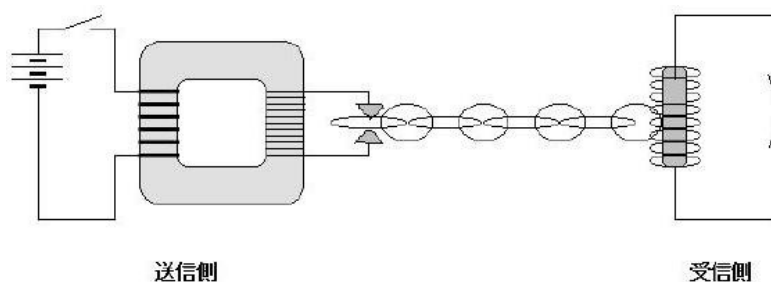


図 10.5 ヘルツの実験モデル

1886 年、ヘルツは、およそ 300m 離れた場所に、間隔を狭めた針端を設置して到達した電磁波の磁界をコイルで拾ってこれに伝え、ここに生ずる絶縁破壊を観測することによって電磁波の存在を確認した。今日では、電磁波は人類にとって必須の通信手段であり、放送、通信、制御等々、家庭用の調理器までいたる所に使われている。

## 練習問題（やや難しい）

(1) 誘電体内で、 $E_x, H_y$  成分だけをもつ平面電磁波の一般解は

$$E_x = f_1(z - vt) + f_2(z + vt)$$

で与えられる。この式から、 $E_x$  と  $H_y$  の振幅比を求め、その位相を比較しなさい。

《解答》 $z$  軸の正の方向に進む電磁波だけをとると

$$E_x = f_1(z - vt), \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

これを  $\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$  の関係より

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)} \frac{\partial(z - vt)}{\partial t} = -\epsilon v \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)}$$

$$dH_y = \epsilon v \frac{\partial f_1(z - vt)}{\partial(z - vt)} dz$$

であるから、積分して、

$$H_y = \epsilon v f_1(z - vt) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_1(z - vt)$$

である。振幅比（これを媒質の固有電波インピーダンスと呼ぶ）は

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

となる。また、 $E_x$  と  $H_y$  の符号は同じであるから電界と磁界の位相は同じである。

次に  $z$  軸の負の方向に進む電磁波については、上記と同様にして、

$$E_x = f_1(z + vt), \quad H_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f_2(z + vt)$$

を得る。従って、振幅比は

$$\left| \frac{E_x}{H_y} \right| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

となり、電界と磁界の符号が異なるから、位相は反対となる。よって、電界と磁界の振幅比はどこも等しく、 $z > 0$  の方向へ進む電磁波は電界と磁界の位相が等しく、 $z < 0$  の方向へ進む電磁波は電界と磁界の位相は反対である。いま、 $z$  方向へ進む電界の  $x$  成分を  $E_x = f_x(z - ct)$ 、 $y$  成分を  $E_y = f_y(z - ct)$  とすれば、両者を合成したものが電界の強さとなり、磁界も同様である。電界と磁界は互いに垂直である。しかし、ある特定の点、例えば  $z = 0$  の点で、 $E_x$  は  $f_x(-ct)$ 、 $E_y$  は  $f_y(-ct)$  で表される時間変化をする。いま、仮に電界が  $x$  成分のみからなり、 $E_y = 0$  ならば、電界の方向は常に一定していることとなる。このように電界の方向が常に一定しているもの

を平面電磁波と呼ぶ。電界の  $y$  成分  $E_y$  が零でなく  $|E_y| = |E_x|$  であり、且つ、電界の  $x$  成分  $E_x$  よりも時間的位相が  $\pi/2$  遅れているとすれば、電界の大きさは一定であるが方向は一定でなく、回転することとなる。このような電磁波を円偏波電磁波と呼ぶ。

(2) 電界が次式で表される平面電磁波の、空気中における磁界を求めよ。

$$E_x = E \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) = 2.3 \times 10^{-5} \sin 10^4 \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad [V/m]$$

《解答》与えられた電磁波の電界は、位置的には  $z$  軸の正の方向にだけ変化するから、この電磁波は  $z$  軸の正方向へ進む。そして電界は  $x$  軸の方向にだけ振動するゆえ磁界の振動は  $y$  軸方向に行われる。電界と磁界の関係は、 $\nabla \times \mathbf{E} = -(\partial \mathbf{B} / \partial t)$  より

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}$$

であるから、

$$H_y = -\frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial E_x}{\partial z} dt = \frac{E}{\mu_0 v} \sin \omega \left( t - \frac{z}{v} \right)$$

となる。

$$E = 2.3 \times 10^{-5}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}, v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8, \omega = 10^4$$

を代入して、

$$H_y = 6.1 \times 10^{-8} \sin 10^4 \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad [A/m]$$

となる。

(3) 電磁界の単位体積当たりのエネルギーは、電界と磁界によるエネルギーの和で与えられる。すなわち

$$U = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \quad [J/m^3]$$

である。しかし、問題(1)の結果から、

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|$$

が成り立つから、

$$\frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$$

となる。従って、電磁波が単位面積を 1 秒間に通過するエネルギーは

$$U \cdot v = \frac{1}{2} (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \quad [W/m^2]$$

である。この電力を（ポインティングベクトル）Poynting Vector による電力と呼ぶ。さて、太陽と地球が平均距離にあり、地球を包む大気による吸収がなかったとき、地表において日光に直角に向けた  $1[cm^2]$  の面積を 1 分間に通過する太陽放射エネルギーは、 $2.00[cal/cm^2 \text{ min}]$  である。地表上の電界および磁界を計算せよ。

《解答》太陽の放射線が地表に達したときは、これを平面電磁波と見ても良い。そうすると地上の電界を  $\mathbf{E}$ 、磁界を  $\mathbf{H}$  とすれば、日光に垂直な  $1[cm^2]$  を  $1[s]$  間に通過するエネルギーは

$$\begin{aligned} EH &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 = \frac{2.00}{60} \quad [cal/cm^2 s] \\ &= \frac{2.00 \times 4.2 \times 10^4}{60} = 1.4 \times 10^3 \quad [W/m^2] \end{aligned}$$

であるから、

$$E^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \times 1.4 \times 10^3 = 5.5 \times 10^5, \quad E = 7.4 \times 10^2 \quad [V/m]$$

$$H = \frac{1.4 \times 10^3}{E} = 1.9 \quad [A/m]$$

(4) 半径  $a$ 、単位長さ当りの抵抗  $R$  をもつ導体があり、この導体に電流  $I$  が流れている。この導体に接近した半径  $r$ 、単位長の円筒面  $S_1$  とその上下端面  $S_2, S_3$  からなる閉曲面上のポインティングベクトルを求め、この閉曲面から流れ出す電力を求めよ。

《解答》 $R$  は単位長さ当りの抵抗であるから、電界  $\mathbf{E}$  は

$$\mathbf{E} = R\mathbf{I} \quad [V/m]$$

である。この電界  $\mathbf{E}$  は円筒の軸方向であり、また、電流  $\mathbf{I}$  の作る磁界  $\mathbf{H}$  は

$$|\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{I}|}{2\pi r} \quad [A/m]$$

であり、その方向は円筒の円周方向である。このため、ポインティングベクトル

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad [W/m^2]$$

は円筒面  $S_1$  方向のみとなり、 $S_2$  と  $S_3$  方向には存在しない。従って、

$$P = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} ds = RI \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = RI^2 \quad [W / m]$$

の電力が導体の内側方向へ出て行くこととなり、これは抵抗損失に等しい。

## 授業計画

電磁気学は現代電気電子工学の原点をなす学問である。本講義では、種々の電気現象とその応用機器を通して静電界系の概念を把握することを目的とする。具体的には、真空中の静電荷と電荷間の吸引・反発力、真空中の誘電率と透磁率および光の伝搬速度、電界と電荷の関係、電界と誘電率および電束密度の関係、クーロン力と電位および電界エネルギーの関係、電位と誘電率および静電容量の関係などを主として現象と具体例を通して学ぶ。数学的素養として、ベクトルの加算、減算、勾配演算、発散演算などの概念と基礎演算法を講義する。

項目 (ページ数)	Page	日程
はじめに(2)	3	1
第1章 数学的基礎1 (微積分) (16)	5	2
第2章 電荷、クーロン力、電界(21)	21	3、4
第3章 電位・電位差(13)	41	5
第4章 電気力線、誘電体、キャパシタンス(17)	54	6、7
第5章 電流、変位電流、電界エネルギー(11)	71	8
第6章 磁界、アンペアの法則(15)	82	9
第7章 電磁誘導、磁性体、インダクタンス(22)	97	10、11
第8章 数学的基礎2 (ベクトル微積分) (11)	115	12
第9章 スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル(11)	128	13
第10章 電磁波(9)	141	14